Hans U. Simon
Malte Darnstädt

Bochum, den 28.04.2010
Abgabe bis zum 5.05. in der Übung

Übungen zur Vorlesung

Komplexitätstheorie

Sommer 2010

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1

Zeige, dass folgende Probleme in NP liegen. Gib dazu ein passendes Zertifikat an und zeige, dass sowohl dessen Größe als auch die Rechenzeit des Verifikators polynomiell beschränkt ist.

a) **CLIQUE**
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Anzahl k
Frage: Existiert in G eine Clique der Größe k, d.h. eine Menge $C \subseteq V$ der Mächtigkeit k, deren Knoten paarweise in G benachbart sind?

b) **KNAPSACK**
Eingabe: n Objekte mit Gewichten $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{N}$ und Nutzen $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$, eine Gewichtsschranke W und eine Nutzenschranke P.
Frage: Kann man einen Rucksack so packen, dass die Objekte im Rucksack zusammen einen Nutzen von mindestens P und ein Gewicht von höchstens W besitzen, d.h. existiert ein $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ so dass $\sum_{i \in I} p_i \geq P$ und $\sum_{i \in I} w_i \leq W$?

c) **VERTEX COVER**
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Anzahl k
Frage: Existiert in G ein Vertex Cover der Größe k, d.h. eine Menge $C \subseteq V$ der Mächtigkeit k, die von jeder Kante aus E mindestens einen Randknoten enthält?

d) **k-COLORABILITY**
Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$. Die Zahl k ist fest und nicht Teil der Eingabe.
Frage: Kann man die Knoten von G mit k Farben so färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben besitzen, d.h. existiert eine Abbildung $f : V \to \{1, \dots, k\}$ so dass für alle Kanten $\{u, v\} \in E$ die Bedingung $f(u) \neq f(v)$ erfüllt ist?

Aufgabe 2.2

Zeige, dass HALT (das Halteproblem) NP-schwer ist. Ist HALT auch NP-vollständig?

HALT
Eingabe: Ein String α, der eine Turingmaschine kodiert, und ein $x \in \{0, 1\}^*$
Frage: Hält die Turingmaschine M_α an, wenn sie auf x gestartet wird?

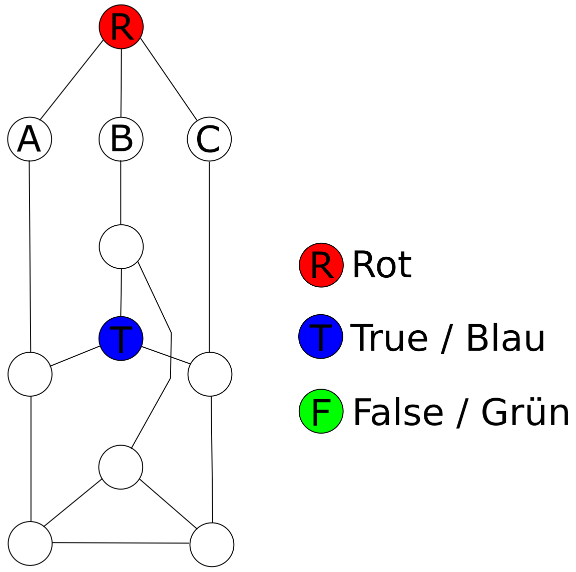

Abbildung 1: Unter der Vorraussetzung, dass die zwei in der Zeichnung farbig markierten Knoten tatsächlich 'rot' und 'blau' eingefärbt werden, ist zu zeigen, dass A, B und C nicht 'rot' sein können und mindestens eines von ihnen 'true' sein muss. Damit eignen sich A, B und C zum Modellieren der Literale einer 3CNF-Klausel.

Aufgabe 2.3

DNF-SAT sei das Entscheidungsproblem, ob eine boolsche Formel in disjunktiver Normalform (z.B. $\varphi = (x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2)$) eine erfüllbare Belegung der Variablen besitzt. Zeige zunächst, dass DNF-SAT $\in P$.
Mit Hilfe des Distributivgesetzes ist es möglich, eine CNF-Formel in eine äquivalente DNF-Formel zu transformieren. Warum folgt aus dieser Transformation nicht SAT $\in P$ und damit $P = NP$?

Aufgabe 2.4

Zeige, dass 3-COLORABILITY NP-hart ist.

Hinweis: Reduziere 3SAT auf 3-COLORABILITY. Dazu ist das Gadget aus Abbildung 1 nützlich.

Neue Informationen zu den Übungen

Neben einem Übungsschein kann man durch das Bearbeiten der Übungsblätter einen Bonus bei der Prüfung erhalten:

- mit mindestens sechzig Prozent der Punkte verbessert sich die Note um eine Drittel-Note
- mit mindestens achtzig Prozent verbessert sie sich um zwei Drittel-Noten

Weitere Voraussetzung ist das Vorstellen mindestens einer eigener Lösung zu den Übungsaufgaben in den Übungen.