RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Analysis

14.7.2000 (SS 2000)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Auf ein Konto wird nach Vertragsabschluss einmalig ein Betrag $K = 10000$ DM zu Quartalsbeginn eingezahlt, danach zu Beginn jeden weiteren Quartals ein Betrag $E = 1000$ DM. Die Verzinsung beträgt 4 % nominal. Die Zinsen werden dem Konto am Ende jeden Quartals gutgeschrieben.

(a) Wie lautet allgemein die Formel zur Berechnung des Guthabens nach n Quartalen für diese Sparform ?

(b) Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 5. Jahres ?

(c) Stellen Sie die Formel aus (a) nach n um!

(d) Nach wie vielen Quartalen sind 50000 DM angespart ?

Lösung:

$1{,}04^5 = 1{,}2167$	$26\cdot(1{,}04^5-1) = 5{,}633$	$26\cdot(1{,}04^4-1) = 4{,}416$	$1{,}01^{20} = 1{,}2202$	$101\cdot(1{,}01^{20}-1) = 22{,}239$	$101\cdot(1{,}01^{19}-1) = 21{,}019$
$\frac{\ln(\frac{19}{9})}{\ln(1{,}04)} = 19{,}04$	$\frac{\ln(\frac{76}{35})}{\ln(1{,}04)} = 19{,}77$	$\frac{\ln(5)}{\ln(1{,}01)} = 161{,}75$	$\frac{\ln(\frac{50}{101})}{\ln(1{,}01)} = -70{,}66$	$\frac{\ln(\frac{151}{110})}{\ln(1{,}01)} = 31{,}84$	$\frac{\ln(\frac{151}{111})}{\ln(1{,}01)} = 30{,}93$

A 2

Aufgabe 2

Bestimmen Sie – sofern existent – die globalen Extrema der Funktion $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = 16^{\frac{1}{x+2}} & \text{für } 0 \leq x \leq 2 \\ f_r(x) = x^3 - 27x + 48 & \phantom{\text{für }} 2 < x \leq 4 \end{cases}$

Lösung:

Aufgabe 3

Die Nachfragemenge x eines Produktes in Abhängigkeit seines Preises p sei gegeben durch $x(p) = \dfrac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{p}}}{(p+1)^2}$.

(a) Berechnen Sie die Elastizitäten von Nachfrage und Umsatz bezüglich des Preises!

(b) Um wie viel % ändern sich Nachfrage und Umsatz approximativ, wenn der Preis $p_0 = 1$ um 6 % gesenkt wird?

Lösung:

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktion $f(x) = e^{\sin(x^2)}$.

(b) Nähern Sie die Funktion f an der Stelle $x_0 = 0$ durch ein Taylorpolynom 2. Grades an.

Lösung:

Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der drei Funktionen
$f(x) = x^3 - 14x^2 + 100x - 312$, $g(x) = \sin(e^{x^2+1})$, $h(x) = \ln(\sqrt[4]{x^4+1})$.

(b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x_0 = 1$ für die obige Funktion f die beiden Iterationswerte x_1 und x_2 .

Lösung:

Aufgabe 6

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion

$$f(x,\ y) = x^3 - 10x^2 + 53x + y^3 - 8y^2 + 53y + x^2y + xy^2 - 18xy - 100.$$

(b) $(x_0, y_0) = (3; 2)$ und $(x_1, y_1) = (4; 3)$ sind kritische Punkte von f. Ermitteln Sie die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f$ an den beiden Punkten und überprüfen Sie diese auf Definitheit. Handelt es bei den kritischen Punkten um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte?

Lösung:

Aufgabe 7

(a) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x,y,z) = xy^2z^3$ mit $x(t) = e^t$, $y(t) = \ln(t)$, $z(t) = \sqrt{t}$ die totale Ableitung $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

(b) Ermitteln Sie die Steigung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ der impliziten Funktion $3^{x^2-2y} = \frac{1}{3}$ im Punkt $(x_0, y_0) = (1; 1)$.

Lösung:

Aufgabe 8

A 8

Bestimmen Sie mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes die lokalen Extrema der Funktion $f(x,y) = 2x+3y$ unter der Nebenbedingung $4x^2+y^2 = 8x+2y+35$.

Lösung:

A 9

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Integral $\int_1^9 \int_0^1 3x^2\sqrt{y} + \frac{3}{2y^2\sqrt{x}} \; \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

Lösung: