RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Analysis

24.7.2003 (SS 2003)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

A 1

Das Land A weist gegenüber dem Land B einen dreifach höheren Index für den Lebensstandard auf.

(a) Wie viele Jahre dauert es, bis das Land B bei einer *stetigen* Steigerung des Lebensstandards um 5 % den gleichen Indexwert wie das Land A erreicht?

(b) Für die nächsten 20 Jahre betrage die *stetige* Steigerung des Standards in Land A 3 % . Welches *stetige* Wachstum muss das Land B erreichen, damit in 20 Jahren beide Länder den gleichen Standard aufweisen?

$\ln(1{,}03) = 0{,}0296$	$\ln(3) = 1{,}1$	$\frac{\ln(3)}{\ln(1{,}05)} = 22{,}52$	$1{,}03 \cdot \sqrt[20]{3} = 1{,}0882$	$\sqrt[20]{3 \cdot e^{0{,}6}} = 1{,}0886$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie – sofern existent – die globalen Extrema der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} f_l(x) = 1 + \dfrac{x^3+8}{x^3-8} & \text{für } x \leq 0 \\ f_r(x) = 1 + \dfrac{x^3-8}{x^3+8} & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$

A 3

Aufgabe 3

Für ein Produkt sind die Nachfragemenge x in Abhängigkeit seines Verkaufspreises p sowie die Produktionskosten K in Abhängigkeit der hergestellten Menge x gegeben durch

$$x(p) = \frac{100}{p-16}, \quad p \geq 17, \qquad\qquad K(x) = 25 + 17x - 10\sqrt{x}.$$

Bei welchem Preis p_0 (bzw. der dazugehörigen Menge x_0) wird der Gewinn maximal?

(Voraussetzung: hergestellte Menge = nachgefragte Menge.)

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktion $f(x) = \sin(x) \cdot \ln(e^x + x)$.

(b) Berechnen Sie für $x_0 = 0$ die Funktionswerte $f(x_0)$, $f'(x_0)$ und $f''(x_0)$.

(c) Ermitteln Sie für die Funktion f das Taylorpolynom 2. Grades, entwickelt an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der Funktionen $g(x) = \sqrt[3]{(2^x+1)^4}$ und $h(x) = \sin\left(\ln\left(\frac{x^2+1}{e^x}\right)\right)$.

(b) Ermitteln Sie für die Funktion $f(x) = x^3 - 16x^2 + 105x - 270$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x_0 = 3$ die beiden Iterationen x_1 und x_2 .

Aufgabe 6

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 \cdot (y-2) + y^2 \cdot (x-16) - 18xy + 77 \cdot (x+y) + 1.$$

(b) $(x_0 ; y_0) = (0 ; 7)$ und $(x_1 ; y_1) = (-1 ; 6)$ sind kritische Punkte von f.

Ermitteln Sie die beiden Hesse-Matrizen $\mathbf{H}_L(x_0 ; y_0)$ und $\mathbf{H}_L(x_1 ; y_1)$ und überprüfen Sie diese auf Definitheit.

Handelt es sich bei den kritischen Punkten um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte?

Aufgabe 7

(a) Ist die Funktion $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt[3]{x^3+2y^3}}$ homogen? Wenn ja, von welchem Grade? (Rechnung!)

(b) Bestimmen Sie die beiden partiellen Elastizitäten.

(c) Um wie viel % ändert sich der aktuelle Funktionswert $f(x_0, y_0)$ für $x_0 = y_0 = 2$ näherungsweise, wenn jede Variable ceteris paribus um 6 % erhöht wird?

(d) Um wie viel % ändert sich der aktuelle Funktionswert exakt, wenn beide Variablen gleichzeitig um 6 % erhöht werden?

Aufgabe 8

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = x+y$

unter der Nebenbedingung $\ln(x^2+y) = y^2+x-1$.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(x, y, \lambda)$ auf und bestimmen Sie für diese Funktion alle notwendigen partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

(b) $(x_0 ; y_0) = (0 ; 1)$ und $(x_1 ; y_1) = (1 ; 0)$ sind kritische Punkte von L. Berechnen Sie λ_0 und λ_1.

(c) Bestimmen Sie die beiden Hesse-Matrizen $\mathbf{H}_L(x_0 ; y_0 ; \lambda_0)$ und $\mathbf{H}_L(x_1 ; y_1 ; \lambda_1)$.

(d) Handelt es bei den kritischen Punkten um lokale Minima oder lokale Maxima der Funktion f unter der Nebenbedingung? (Begründung!)

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Integral $\int_1^4 \int_0^1 8xy - 3\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}\ \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x.$