RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Analysis

23.7.2004 (SS 2004)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	
Unterschrift	

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

A 1

Aufgabe 1

Es werden Aktien im Wert von 1000 € erworben.

(a) Wie hoch ist der Wert der Aktien nach 5 Jahren, wenn in dieser Zeit mit einer stetigen Wertsteigerung von 4% gerechnet werden kann ?

(b) Die Dividende in Höhe von 20 € wird am Ende jeden Jahres auf einem Extrakonto mit 2%-iger Verzinsung und jährlicher Zinsgutschrift angelegt. Welcher Betrag steht auf diesem Konto am Ende des 5. Jahres zur Verfügung ?

(c) Welche Rendite (effektive Verzinsung) erzielt man insgesamt mit dem Erwerb der Aktien ?

$e^{0,02} = 1{,}0202$	$1{,}02^5 = 1{,}1041$	$e^{0,2} = 1{,}2214$	$1{,}04^5 = 1{,}2167$	$102\cdot(1{,}02^5-1) = 10{,}616$	$e^{0,04} = 1{,}0408$
$1{,}2^5 = 2{,}48832$	$e^{0,1} = 1{,}10517$	$2\cdot 1{,}4^5 = 10{,}756$	$e^{0,4} = 1{,}49182$	$52\cdot(1{,}04^5-1) = 11{,}266$	$e^2 = 7{,}38906$
$\sqrt[5]{1{,}3255} = 1{,}058$	$\sqrt[5]{1{,}32075} = 1{,}0572$	$2\cdot\ln(1{,}32156) = 0{,}558$	$\sqrt[5]{1{,}33406} = 1{,}0593$	$2\cdot\ln(1{,}3255) = 0{,}564$	$\sqrt[5]{1{,}32156} = 1{,}0573$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie – sofern existent – die globalen Extrema der Funktion $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = x & \text{für } x \leq 1 \\ f_r(x) = x^{1/x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$.

$e = 2{,}72$	$1/e = 0{,}37$	$e^{0,37} = 1{,}44$

A 3

Aufgabe 3

Der Gewinn eines Unternehmens in Abhängigkeit der hergestellten Menge x eines Produktes sei gegeben durch

$$G(x) = \frac{x \cdot \sqrt{x^2+200}}{\sqrt[3]{x^2-200}} .$$

(a) Berechnen Sie die Elastizitäten von Gewinn und Stückgewinn bezüglich der hergestellten Menge x.

(b) Um wie viel Prozent ändern sich Gewinn bzw. Stückgewinn approximativ,
wenn die Produktionsmenge $x_0 = 20$ um 3 % erhöht wird?

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktion $f(x) = x - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$.

(b) Berechnen Sie für $x_0 = 0$ und $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g''(0) = 2$, $g'''(0) = 3$ die Funktionswerte $f(x_0)$, $f'(x_0)$ und $f''(x_0)$.

(c) Ermitteln Sie für die Funktion f das Taylorpolynom 2. Grades, entwickelt an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 5

A 5

(a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der Funktionen

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \qquad \text{und} \qquad h(x) = e^{\sqrt{x^4+1}} + \ln(\sin(2x+1)) \,.$$

(b) Ermitteln Sie für die Funktion $f(x) = x^3 - x^2 + x + 3$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x_0 = 2$ die beiden Iterationen x_1 und x_2 .

A 6

Aufgabe 6

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion

$$f(x,y) = x^2y^2 - y^2 - 4x^2y + 3x^2 + 4y - 3.$$

(b) $(x_0\,;\,y_0) = (0\,;\,2)$ und $(x_1\,;\,y_1) = (1\,;\,1)$ sind kritische Punkte von f.
Ermitteln Sie die beiden Hesse-Matrizen $\mathbf{H}_f(x_0\,;\,y_0)$ und $\mathbf{H}_f(x_1\,;\,y_1)$ und überprüfen Sie diese auf Definitheit.
Handelt es sich bei den kritischen Punkten um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte?

Aufgabe 7

(a) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 - y^4}}$ mit $x(t) = \ln(t^3 + 1)$ und $y(t) = 2^t + 1$

die totale Ableitung $\dfrac{df}{dt}$.

(b) Ermitteln Sie die Steigung $\dfrac{dy}{dx}$ der impliziten Funktion $x^3y^5 + y^2 = xy^6 + x^4 + 1$ im Punkt $(0 ; 1)$.

Aufgabe 8

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = x^3 y + x - y + 1$
unter der Nebenbedingung $x^2 y^3 + y = x^5 y + x + 1$.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(x, y, \lambda)$ auf und bestimmen Sie für diese Funktion alle notwendigen partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

(b) $(x_0 ; y_0) = (0 ; 1)$, $(x_1 ; y_1) = (-1 ; 0)$ sind kritische Punkte von L. Berechnen Sie λ_0 und λ_1.

(c) Bestimmen Sie die beiden Hesse-Matrizen $\mathbf{H}_L(x_0, y_0, \lambda_0)$ und $\mathbf{H}_L(x_1, y_1, \lambda_1)$.

(d) Handelt es bei den kritischen Punkten um lokale Minima oder lokale Maxima der Funktion f unter der Nebenbedingung? (Begründung!)

A 9

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Integral $\int_1^9 \int_1^4 \; 2x-4y \; +3\cdot\sqrt{\frac{x}{y^3}} \; \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$