RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

A n a l y s i s

16.7.2005   (Sommersemester 2005)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	
Unterschrift	

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

A 1

Zu Beginn jedes Monats werden 100 € auf ein Konto eingezahlt. Die Verzinsung beträgt 3 % nominal.
Am Ende jedes Monats werden die Zinsen dem Konto gutgeschrieben.

(a) Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 10. Jahres?

(b) Nach wie vielen Monaten sind 20.000 € angespart?

$103 \cdot \frac{1{,}03^{10}-1}{3} = 11{,}808$	$1{,}03^{10} = 1{,}34392$	$1{,}0025^{120} = 1{,}34935$	$401 \cdot (1{,}0025^{120} - 1) = 140{,}09$	$e^{3{,}6} = 36{,}5982$	$e^{0{,}3} = 1{,}34986$
$\frac{\ln\left(\frac{200}{401} + 1\right)}{\ln(1{,}0025)} = 162$	$\frac{\ln(6)}{\ln(1{,}03)} = 62{,}6$	$\frac{\ln(1{,}5)}{\ln(1{,}0025)} = 162{,}4$	$\frac{\ln\left(\frac{600}{103} + 1\right)}{\ln(1{,}03)} = 65$	$\frac{\ln(200)}{\ln(1{,}0025)} = 2122$	$\ln(20000) = 9{,}9$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie – sofern existent – die globalen Extrema der Funktion $f(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$.

Aufgabe 3

Die Nachfragemenge x eines Produktes in Abhängigkeit seines Preises p sei gegeben durch $x(p) = \dfrac{e^{6-p/2}}{\sqrt[4]{p^2+1}}$.

(a) Berechnen Sie die Elastizitäten von Nachfrage und Umsatz bezüglich des Preises.

(b) Um wie viel % ändern sich Nachfrage und Umsatz approximativ, wenn der Preis $p_0 = 2$ um 5 % gesenkt wird?

A 4

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktion $f(x) = \sin(x \cdot \ln(x))$.

(b) Berechnen Sie für $x_0 = 1$ die Funktionswerte $f(x_0)$, $f'(x_0)$ und $f''(x_0)$.

(c) Ermitteln Sie für die Funktion f das Taylorpolynom 2. Grades, entwickelt an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der Funktionen $g(x) = \dfrac{x \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x^5}}$ und $h(x) = \sin(\ln(x^3 + 3^x))$.

(b) Ermitteln Sie für die Funktion $f(x) = x^3 - 13\,x^2 + 200\,x - 800$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ die beiden Iterationen x_1 und x_2 .

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) = 4\ \ln(x) - xy^2 + 2y - 3x + 1$ auf lokale Extrema und Sattelpunkte.

A 7

Aufgabe 7

(a) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y) = y^2 \cdot \ln(x) + x \cdot 2^y$ mit $x(t) = \sin(t^2+1)$, $y(t) = \cos(t^3)$ die totale Ableitung $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

(b) Ermitteln Sie die Steigung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ der impliziten Funktion $xy^4 + x^5 y = x^2 y^3 + 2xy^2 - 1$ im Punkt $(1\,;\,1)$.

Aufgabe 8

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = x^3 y - x^2 y^2 + 4(x-y) + 1$
unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 2xy + 9$.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(x, y, \lambda)$ auf und bestimmen Sie für diese Funktion alle notwendigen partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

(b) $(x_0 ; y_0) = (0 ; -3)$, $(x_1 ; y_1) = (2 ; -1)$ sind kritische Punkte von L. Berechnen Sie λ_0 und λ_1 .

(c) Bestimmen Sie die beiden Hesse-Matrizen $\mathbf{H}_L(x_0, y_0, \lambda_0)$ und $\mathbf{H}_L(x_1, y_1, \lambda_1)$.

(d) Handelt es bei den kritischen Punkten um lokale Minima oder lokale Maxima der Funktion f unter der Nebenbedingung? (Rechnung!)

Aufgabe 9

A 9

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_1^9 \int_0^1 3\,y^2\sqrt{x} + \frac{3}{2x^2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.