RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

A n a l y s i s

7.7.2006 (Sommersemester 2006)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	
Unterschrift	

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

(a) Auf ein Rentenkonto wird zu Beginn jeden Monats ein Betrag von 200 € eingezahlt. Die Verzinsung beträgt 2,4 % nominal. Die Zinsen werden dem Konto am Ende jeden Monats gutgeschrieben.
Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 40. Jahres ?

(b) Dieses Guthaben dient nach Ablauf der 40 Jahre zur Zahlung einer Rente. Zu Beginn jeden Monats wird ein Betrag von 1500 € entnommen. Die Verzinsung beträgt weiterhin 2,4 % nominal bei monatlicher Zinszahlung.
Nach wie vielen Monaten ist das Kapital aufgebraucht, also der Kontostand 0 erreicht ?

$1{,}024^{40} = 2{,}582$	$1{,}024 \cdot \frac{1{,}024^{40}-1}{0{,}024} = 67{,}51$	$e^{0{,}96} = 2{,}612$	$1{,}002^{480} = 2{,}6092$	$1002 \cdot (1{,}002^{480}-1) = 1612{,}41$	$1{,}024^{480} = 87898$
$\frac{15 \cdot 501}{15 \cdot 501 - 1612{,}41} = 1{,}273$	$\frac{\ln(1{,}273)}{\ln(1{,}002)} = 120{,}9$	$\frac{\ln(1{,}273)}{\ln(1{,}024)} = 10{,}2$	$\frac{\ln(1{,}267)}{\ln(1{,}002)} = 118{,}6$	$\frac{15 \cdot 128}{15 \cdot 128 - 6 \cdot 67{,}51} = 1{,}267$	$\frac{\ln(1{,}267)}{\ln(1{,}024)} = 9{,}99$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie – sofern existent – die globalen Extrema der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1} & & x \le -1 \\ f_2(x) = \sqrt{1-x^2} & \text{für} & -1 < x < 1 \\ f_3(x) = x^2 - 4x + 3 & & x \ge 1 \end{cases} .$$

Aufgabe 3

Für ein Produkt sind die Nachfragemenge x in Abhängigkeit seines Verkaufspreises p sowie die Produktionskosten K in Abhängigkeit der hergestellten Menge x gegeben durch

$$x(p) = \frac{256}{p-24}, \quad p \geq 25, \qquad K(x) = 100 + 27x - 8\sqrt[4]{x^3}.$$

Bei welchem Preis p_0 (bzw. der dazugehörigen Menge x_0) wird der Gewinn maximal?

(Voraussetzung: hergestellte Menge = nachgefragte Menge.)

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktion $f(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$.

(b) Berechnen Sie für $x_0 = 1$ die Funktionswerte $f(x_0)$, $f'(x_0)$ und $f''(x_0)$.

(c) Ermitteln Sie für die Funktion f das Taylorpolynom 2. Grades, entwickelt an der Stelle $x_0 = 1$.

A 5

Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der Funktionen $g(x) = x^{\sqrt{x}}$ und $h(x) = \ln(\ln(x^2+1))$.

(b) Ermitteln Sie für die Funktion $f(x) = x^3 - 10x^2 + 96x - 288$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ die beiden Iterationen x_1 und x_2 .

A 6

Aufgabe 6

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion

$$f(x,\ y) = x^2y^2 - 2x^2y - 4xy^2 + 8xy + 3y^2 - 6y + 1.$$

(b) (1; 0) und (2; 1) sind kritische Punkte dieser Funktion.
Ermitteln Sie die Hesse-Matrizen an den kritischen Punkten und Überprüfen Sie diese auf Definitheit.
Handelt es sich bei diesen Punkten um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte?

Aufgabe 7

(a) Ist die Funktion $f(x,y) = y \cdot \sqrt{\dfrac{x^3+2y^3}{2x+y}}$ homogen? Wenn ja, von welchem Grade? (Rechnung!)

(b) Bestimmen Sie die beiden partiellen Elastizitäten.

(c) Um wie viel % ändert sich der aktuelle Funktionswert $f(x_0, y_0)$ für $x_0 = y_0 = 10$ näherungsweise, wenn jede Variable ceteris paribus um 6 % erhöht wird?

(d) Um wie viel % ändert sich der aktuelle Funktionswert exakt, wenn beide Variablen gleichzeitig um 6 % erhöht werden?

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f(x,y) = (x-2)^2 + (y-6)^2$
unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 10$.

A 9

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x\,y}} + 3\sqrt{x} - \sqrt{y} - 2 \;\; \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.