RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Analysis

13.7.2007 (Sommersemester 2007)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	
Unterschrift	

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

(a) Ein Betrag K wird *einmalig* auf ein Konto mit *monatlicher* Zinsgutschrift eingezahlt. Nach 10 Jahren hat sich das Kapital verdoppelt. Wie hoch war der Zinssatz p ?

(b) Wieviel Jahre dauert es, bis sich der Wert des Geldes halbiert, wenn mit einer *stetigen* Inflation von 1% gerechnet werden muss ?

$\ln(2) = 0{,}693$	$\sqrt[10]{2} = 1{,}0718$	$\sqrt[120]{2} = 1{,}00579$	$12 \cdot 0{,}579 = 6{,}95$	$e^{0{,}12} = 1{,}13$	$\ln(120) = 4{,}79$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie – sofern existent – die globalen Extrema der Funktion $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = -x^2 - 2x + 9 & \text{für} \quad 0 \le x \le 2 \\ f_r(x) = x^2 - 10x + 17 & \phantom{\text{für}} \quad 2 < x \le 4 \end{cases}$.

Aufgabe 3

Für ein Produkt seien die Nachfragemenge x in Abhängigkeit seines Verkaufspreises p für $p \geq 20$ gegeben durch

$$x(p) = \frac{900}{p-19}.$$

Die Produktionskosten K in Abhängigkeit der hergestellten Menge x betragen $K(x) = 400 + 20x - 20\sqrt{x}$.
Bei welchem Preis p_0 (bzw. der dazugehörigen Menge x_0) wird der Gewinn maximal?

(Voraussetzung: hergestellte Menge = nachgefragte Menge.)

Aufgabe 4

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades für die Funktion $f(x) = e^{\sin(\ln(x+1))}$, entwickelt an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der beiden Funktionen

$$g(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}, \qquad h(x) = \ln(x^4 + 4^x).$$

(b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Newton–Verfahrens ausgehend vom Startwert $x_0 = -5$ für die Funktion f mit

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 100x - 200$$

die beiden Iterationswerte x_1 und x_2 .

Aufgabe 6

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion $f(x,\ y) = x^4y + xy^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2y^2 + 1$.

(b) $(0;\,0)$ und $(1;\,1)$ sind kritische Punkte von f. Geben Sie die Hesse–Matrizen $\mathbf{H}_f(0;\,0)$ und $\mathbf{H}_f(1;\,1)$ an und untersuchen Sie diese auf Definitheit. (Rechnung!)
Handelt es sich bei den kritischen Punkten um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte?

Aufgabe 7

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \dfrac{(x + 2y)^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}$.

(a) Ist die Funktion homogen? Wenn ja, von welchem Grade? (Rechnung!)

(b) Bestimmen Sie die beiden partiellen Elastizitäten.

(c) Um wieviel % ändert sich der aktuelle Funktionswert $f(x_0, y_0)$ für $x_0 = y_0 = 10$ näherungsweise, wenn jede Variable ceteris paribus um 3 % erhöht wird?

(d) Um wieviel % ändert sich der aktuelle Funktionswert exakt, wenn beide Variablen gleichzeitig um 3 % erhöht werden?

Aufgabe 8

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - x + 1$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(x, y, \lambda)$ auf und bestimmen Sie für diese Funktion alle notwendigen partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

(b) $(1; 0; 0)$ und $(-1; 0; 0)$ sind kritische Punkte von L. Geben Sie die beiden Hesse-Matrizen $\mathbf{H}_L(1; 0; 0)$ und $\mathbf{H}_L(-1; 0; 0)$ an. Handelt es sich bei den beiden Punkten um lokale Minima oder lokale Maxima der Funktion f unter der Nebenbedingung? (Rechnung!)

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \int_1^4 4xy - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} \; \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$.