RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Analysis

3.7.1997 (SS 97)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Die endgültige Lösung muß auf das jeweilige Aufgabenblatt oder die betreffende Rückseite geschrieben werden.

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Punkte 1

Aufgabe 1

Ein Betrag von 1000 DM soll angelegt werden.
Wie hoch ist das Kapital nach 3 Jahren in jeder drei folgenden Anlageformen, wenn die Zinsen bzw. der Bonus dem Konto jeweils am Ende eines Jahres gutgeschrieben und mitverzinst werden?.
Welche Rendite (effektive Verzinsung) erzielt man bei den Anlageformen (b) bzw. (c) ?

Alternative Anlageformen:

(a) Sparbrief mit einer Verzinsung von 4 % ;

(b) Bundesschatzbrief mit einer Verzinsung von 2,6 % im 1. Jahr, 4,1 % im 2. Jahr und 5,6 % im 3. Jahr ;

(c) Bonussparen mit 2 %-iger Verzinsung und einem jährlichen Bonus von 20 DM.

Lösung:

$1{,}02^3 = 1{,}06121$	$1{,}04^3 = 1{,}12486$	$1{,}041^3 = 1{,}12811$	$e^{0{,}06} = 1{,}06184$	$e^{0{,}12} = 1{,}1275$	$1{,}026 \cdot 1{,}041 \cdot 1{,}056 = 1{,}12788$
$1{,}02 \cdot 61{,}21 = 62{,}43$	$\sqrt[3]{1{,}1275} = 1{,}0408$	$\sqrt[3]{1{,}06184} = 1{,}0202$	$\sqrt[3]{1{,}12242} = 1{,}0392$	$\sqrt[3]{1{,}12788} = 1{,}0409$	$\sqrt[3]{1{,}12364} = 1{,}0396$

Punkte 2

Aufgabe 2

Bestimmen Sie – sofern existent – die globalen Extrema der Funktion $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x^2+2x-1 & & 0 \le x \le 2 \\ f_2(x) = -2x+11 & \text{für} & 2 < x < 4 \\ f_3(x) = -\frac{1}{4}x^2+4x-9 & & 4 \le x \le 6 \end{cases}$.

Lösung:

Punkte 3

Aufgabe 3

Die Nachfragemenge x eines Produktes in Abhängigkeit seines Preises p sei $x(p) = \left(\frac{\ln(p)}{p}\right)^2$.

(a) Berechnen Sie die Elastizitäten von Nachfrage und Umsatz bezüglich des Preises!

(b) Um wieviel % ändern sich Nachfrage und Umsatz approximativ, wenn der Preis von $p_0 = e^2$ um 1 % gesenkt wird?

Lösung:

Punkte 4

Aufgabe 4

Nähern Sie die Funktion $f(x) = \ln(1 + \ln(x))$ an der Stelle $x_0 = 1$ durch ein Taylorpolynom 2. Grades an!

Lösung:

Punkte 5

Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der drei Funktionen

$f(x) = x^3 - 10x^2 - 192x + 864$, $g(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$, $h(x) = 2^{1-x^3} - e^{x^2} + 1$.

(b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x_0 = 8$ für die obige Funktion f die beiden Iterationen x_1 und x_2 ! (Einige Funktionswerte von f bzw. f' sind in der Tabelle unten gegeben.)

Lösung:

x	-8	-5	-3	3	5	8
$f(x)$	1248	1449	1323	225	–221	–800
$f'(x)$	160	–17	–105	–225	–217	–160

Punkte 6

Aufgabe 6

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion

$$f(x,\ y) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}y^2 + 3y + 2xy + y\cdot\ln(x) - 1.$$

(b) $(1; -1)$ ist ein kritischer Punkt von f. Geben Sie die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f(1; -1)$ an.

(c) Liegt in $(1; -1)$ ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder ein Sattelpunkt vor? (Begründung!)

Lösung:

Punkte 7

Aufgabe 7

(a) Bestimmen Sie die totale Ableitung $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ für $f(x,y) = 3x^{1/3}\,y^{2/3}$ mit $x(t) = t^2+1$ und $y(t) = \ln(t)$.

(b) Ermitteln Sie die Steigung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ der impliziten Funktion $e^{4x-2y} = 1$ in einem beliebigen Punkt (x_0, y_0).

Lösung:

Punkte 8

Aufgabe 8

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = \ln(x) + y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + xy + y^2 = 3$.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(x, y, \lambda)$ auf und bestimmen Sie für diese Funktion alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

(b) $(1; 1; -1/3)$ ist ein kritischer Punkt von L. Geben Sie die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_L(1; 1; -1/3)$ an.

(c) Liegt in $(1; 1)$ ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder ein Sattelpunkt der Funktion f unter der Nebenbedingung vor? (Begründung!)

Lösung:

Punkte 9

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Integral $\int_1^e \int_0^1 \frac{3\sqrt{x}}{2y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

Lösung: