RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Analysis

3.7.1998 (SS 98)

| | |
|---|---|
| Name | |
| Vorname | |
| Teilnehmer-Nr. | |

## Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Die endgültige Lösung muß auf das jeweilige Aufgabenblatt oder die betreffende Rückseite geschrieben werden.

Hilfsmittel: keine

## Bitte nicht ausfüllen

| Punkte | Note | Unterschrift |
|---|---|---|
| | | |

## Aufgabe 1

Das Guthaben auf einem Konto beträgt $K$ DM, die Verzinsung $p$ %, der Zinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$. Die Zinsen werden dem Konto am Ende jeden Jahres gutgeschrieben. Zu Beginn jeden Jahres wird ein Betrag in Höhe von $E$ DM entnommen.

(a) Wie hoch ist der Kontostand am Ende der ersten, zweiten, dritten, vierten und allgemein des $n$-ten Jahres?

(b) Stellen Sie die Formel aus (a) nach $n$ um!

(c) Nach wieviel Jahren ist für $K = 1000$, $E = 100$ und $p = 5$ das Kapital aufgebraucht, also der Kontostand 0 erreicht?

**Lösung:**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\ln(\frac{10}{21}+1)}{\ln(1{,}05)} = 7{,}98$ | $\frac{\ln(\frac{21}{11})}{\ln(1{,}05)} = 13{,}25$ | $\frac{\ln(2)}{\ln(1{,}05)} = 14{,}21$ | $5 \cdot \ln(10) = 11{,}51$ | $\frac{\ln(1{,}5)}{\ln(1{,}05)} = 8{,}31$ | $\frac{\ln(10)}{\ln(1{,}05)} = 47{,}19$ |

## Aufgabe 2

Bestimmen Sie – sofern existent – die globalen Extrema der Funktion $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -2/x & x \le -1 \\ f_2(x) = -x^2+3 \quad \text{für} & -1 < x < 1 \\ f_3(x) = 2/x & x \ge 1 \end{cases}$.

**Lösung:**

## Aufgabe 3

Die Nachfragemenge $x$ eines Produktes in Abhängigkeit seines Preises $p$ sei $x(p) = \frac{1}{\sqrt{p+1}} \cdot e^{4-p/2}$.

(a) Berechnen Sie die Elastizitäten von Nachfrage und Umsatz bezüglich des Preises!

(b) Um wieviel % ändern sich Nachfrage und Umsatz approximativ, wenn der Preis von $p_0 = 2$ DM um 3 % gesenkt wird?

**Lösung:**

## Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x) = \dfrac{2x \cdot \ln(x)}{x-1}$ die Ableitung $f'(x)$ !

(b) Ermitteln Sie für diese Funktionen die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ !

(c) Wie lautet das Taylor-Polynom ersten Grades (Tangente) von $f(x)$, entwickelt an der Stelle $x_0$ ?

**Lösung:**

## Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der drei Funktionen

$f(x) = x^3 - 22x^2 + 60x + 216$ , $g(x) = x^4 \cdot 4^x$ , $h(x) = \ln\left(\sqrt[4]{x^4+1}\right)$

(b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x_0 = 3$ für die obige Funktion $f$ die beiden Iterationswerte $x_1$ und $x_2$ . (Einige Funktionswerte von $f$ bzw. $f'$ sind in nachstehender Tabelle gegeben.)

| $x$ | –8 | –5 | –3 | –1 | 1 | 3 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | –2184 | –693 | –189 | 133 | 255 | 225 | 91 | –200 |
| $f'(x)$ | 604 | 355 | 219 | 107 | 19 | –45 | –85 | –100 |

**Lösung:**

## Aufgabe 6

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion

$$f(x,\ y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + xy + 4x + \frac{4}{x} + 2\cdot\ln(x) + 1.$$

(b) $(1;-1)$ und $(2;-2)$ sind kritische Punkte von $f$. Geben Sie die Hesse-Matrizen $\mathbf{H}_f(1;-1)$ und $\mathbf{H}_f(2;-2)$ an.

(c) Handelt es sich bei den kritischen Punkten um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte? (Begründung!)

**Lösung:**

## Aufgabe 7

Gegeben sei die Produktionsfunktion $f(x, y) = \sqrt[3]{2x^2 + 3y^2 + xy + 1}$. Die aktuelle Produktion sei $(x_0; y_0) = (5; 3)$.
Wieviele Einheiten von $y$ können (näherungsweise) durch den zusätzlichen Einsatz einer Einheit von $x$ substituiert werden, wenn die Produktion konstant bleiben soll?

**Lösung:**

## Aufgabe 8

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x) + y$ unter der Nebenbedingung $x + 2y = 2 - \sqrt{x + 2y}$ .

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(x, y, \lambda)$ auf und bestimmen Sie für diese Funktion alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

(b) $(1; 0; -1/3)$ ist ein kritischer Punkt von $L$. Geben Sie die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_L(1; 0; -1/3)$ an.

(c) Liegt in $(1; 0)$ ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder ein Sattelpunkt der Funktion $f$ unter der Nebenbedingung vor? (Begründung!)

**Lösung:**

# Aufgabe 9

Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \int_0^2 3x^2y + \frac{2x}{\sqrt{y}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ .

**Lösung:**