RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Analysis

2.7.1999 (SS 1999)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Eine Aktie wird für 10.000 DM erworben.

(a) Wie hoch ist der Wert der Aktie nach 10 Jahren, wenn in dieser Zeit mit einer stetigen Wertsteigerung von 5% gerechnet werden kann ?

(b) Am Ende jeden Jahres erhält man 300 DM Dividende ausgezahlt. Die Dividende wird auf einem Extrakonto mit 3%-iger Verzinsung und jährlicher Zinsgutschrift angelegt. Welcher Betrag steht auf diesem Konto am Ende des 10. Jahres zur Verfügung ?

(c) Welche Rendite (effektive Verzinsung) erzielt man insgesamt mit dem Erwerb der Aktie ?

Lösung:

$1{,}05^{10} = 1{,}628895$	$\frac{1{,}05^{10}-1}{0{,}05} = 12{,}577893$	$e^{1{,}05} = 2{,}857651$	$e^{0{,}5} = 1{,}648721$	$e^{0{,}05} = 1{,}051271$	$\ln(5) = 1{,}609438$
$1{,}03^{10} = 1{,}343916$	$105\cdot(1{,}03^{10}-1) = 36{,}1112$	$3\cdot 1{,}03^{10} = 4{,}03175$	$3\cdot e^{0{,}3} = 4{,}04958$	$3\cdot e^{3} = 20{,}0855$	$\ln(30) = 3{,}4012$
$\sqrt[10]{2{,}051896} = 1{,}0745$	$\sqrt[10]{2{,}033853} = 1{,}0736$	$\sqrt[10]{2{,}009833} = 1{,}0723$	$\sqrt[10]{1{,}992637} = 1{,}0714$	$\sqrt[10]{1{,}988841} = 1{,}0712$	$\sqrt[10]{1{,}972811} = 1{,}0703$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie – sofern existent – die globalen Extrema der Funktion $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -x^2+2x & -2 \le x \le 0 \\ f_2(x) = x^2+2x \quad \text{für} & 0 < x \le 2. \\ f_3(x) = -2x+8 & 2 < x \le 4 \end{cases}$

Lösung:

Aufgabe 3

Der Gewinn eines Unternehmens in Abhängigkeit der hergestellten Menge x eines Produktes sei gegeben durch

$$G(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2-64}}{x+8}\,.$$

(a) Berechnen Sie die Elastizitäten von Gewinn und Stückgewinn bezüglich der hergestellten Menge x.

(b) Um wieviel Prozent ändern sich Gewinn bzw. Stückgewinn approximativ,
wenn die Produktionsmenge $x_0 = 12$ um 5 % erhöht wird?

Lösung:

A 4

Aufgabe 4

Nähern Sie die Funktion $f(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{1 + \ln(x)}$ an der Stelle $x_0 = 1$ durch ein Taylorpolynom 2. Grades an.

Lösung:

Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der drei Funktionen

$f(x) = x^3 - 10x^2 + 36x - 48$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}$, $h(x) = 2^{\sin(x)} + \ln(x^4+1)$.

(b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x_0 = 2$ für die obige Funktion f die beiden Iterationswerte x_1 und x_2 .

Lösung:

A 6

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die Funktion $f(x,\ y) = x^2 y - 4x + 2y - 6\ln(y)$ auf lokale Extrema und Sattelpunkte.

Lösung:

Aufgabe 7

(a) Bestimmen Sie die beiden partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion $f(x,y) = \dfrac{(\ \ln(x+1)+2\ )\cdot(y+2)}{(x+1)\cdot e^y} - 4$.

(b) Ermitteln Sie die Steigung $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ der impliziten Funktion $\dfrac{(\ \ln(x+1)+2\ )\cdot(y+2)}{(x+1)\cdot e^y} = 4$ im Punkt $(x_0\ ;\ y_0) = (0\ ;\ 0)$.

Lösung:

Aufgabe 8

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = \frac{x}{y}$ unter der Nebenbedingung $x + 1 + \ln(x+y) = 0$.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(x, y, \lambda)$ auf und bestimmen Sie für diese Funktion alle notwendigen partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

(b) $(-1; 2; -\frac{1}{4})$ ist ein kritischer Punkte von L. Geben Sie die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_L(-1; 2; -\frac{1}{4})$ an.

(c) Stellt der Punkt $(-1; 2)$ ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt der Funktion f unter der Nebenbedingung dar? (Begründung!)

Lösung:

A 9

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_1^4 \int_0^1 30 \cdot \sqrt{\frac{x^3}{y^5}}\ \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

Lösung: