RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

A n a l y s i s

10.2.2001 (WS 2000/2001)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Eine Aktie wird für 100 DM erworben.

(a) Wie hoch ist der Wert der Aktie nach 25 Jahren, wenn in dieser Zeit mit einer stetigen Wertsteigerung von 4% gerechnet werden kann ?

(b) Am Ende jeden Jahres erhält man 4 DM Dividende ausgezahlt. Die Dividende wird auf einem Extrakonto mit 4%-iger Verzinsung und jährlicher Zinsgutschrift angelegt. Welcher Betrag steht auf diesem Konto am Ende des 25. Jahres zur Verfügung ?

(c) Welche Rendite (effektive Verzinsung) erzielt man insgesamt mit dem Erwerb der Aktie ?

Lösung:

$e^4 = 54{,}5982$	$e = 2{,}7183$	$e^{0,4} = 1{,}4918$	$e^{1,04} = 2{,}8292$	$e^{4/25} = 1{,}1735$	$e^{25/4} = 518{,}01$
$1{,}04^{100} = 50{,}5049$	$1{,}04^{25} = 2{,}6658$	$1{,}01^{100} = 2{,}7048$	$1{,}025^4 = 1{,}1038$	$1{,}4^{25} = 4500$	$1{,}25^4 = 2{,}4414$
$\sqrt[25]{4{,}3316} = 1{,}0604$	$\sqrt[25]{4{,}3841} = 1{,}0609$	$\sqrt[25]{4{,}3982} = 1{,}0601$	$\sqrt[25]{4{,}3706} = 1{,}0608$	$\sqrt[25]{4{,}495} = 1{,}062$	$\sqrt[25]{3{,}9332} = 1{,}0563$

A 2

Aufgabe 2

Bestimmen Sie – sofern existent – die globalen Extrema der Funktion $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = \dfrac{1}{1-x} & \text{für} \quad x \leq 0 \\ f_r(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1 & \phantom{\text{für}} \quad x > 0 \end{cases}$.

Lösung:

Aufgabe 3

Für ein Produkt sei die Nachfragemenge x in Abhängigkeit seines Verkaufspreises p für $p \geq 8$ gegeben durch $x(p) = \dfrac{64}{p-7}$.

Die Produktionskosten K in Abhängigkeit der hergestellten Menge x betragen $K(x) = 6 + 10x - 9\sqrt[3]{x^2}$.

Bei welchem Preis p_0 (bzw. der dazugehörigen Menge x_0) wird der Gewinn maximal?

(Voraussetzung: hergestellte Menge = nachgefragte Menge.)

Lösung:

A 4

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$.

(b) Nähern Sie die Funktion f an der Stelle $x_0 = 1$ durch ein Taylorpolynom 2. Grades an.

Lösung:

Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der drei Funktionen

$f(x) = x^3 + 4x^2 + 8x + 8$, $g(x) = \sqrt{\ln(x^2+1)}$, $h(x) = 2^{3^x}$.

(b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ für die obige Funktion f die beiden Iterationswerte x_1 und x_2 .

Lösung:

Aufgabe 6

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion

$$f(x,\ y) = x^3 - 14x^2 + 92x + y^3 - 10y^2 + 92y - 24xy + x^2y + xy^2 - 200.$$

(b) $(x_0\,;y_0) = (6\,;4)$ und $(x_1\,;y_1) = (4\,;2)$ sind kritische Punkte von f.
Ermitteln Sie die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f$ an den beiden Punkten und überprüfen Sie diese auf Definitheit.
Handelt es bei den kritischen Punkten um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte?

Lösung:

Aufgabe 7

(a) Ist die Funktion $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{2x^4+y^4}}{x+2y}$ homogen? Wenn ja, von welchem Grade? (Rechnung!)

(b) Bestimmen Sie die beiden partiellen Elastizitäten!

(c) Um wie viel % ändert sich der aktuelle Funktionswert $f(x_0, y_0)$ für $x_0 = y_0 = 2$ näherungsweise, wenn jede Variable ceteris paribus um 3 % erhöht wird?

(d) Um wie viel % ändert sich der aktuelle Funktionswert exakt, wenn beide Variablen gleichzeitig um 3 % erhöht werden? (Begründung!)

Lösung:

Aufgabe 8

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = \frac{y}{x+2} + x + 1$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4 - 2xy$.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(x, y, \lambda)$ auf und bestimmen Sie für diese Funktion alle notwendigen partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

(b) $(x_0 ; y_0) = (0 ; 2)$ und $(x_1 ; y_1) = (-4 ; 6)$ sind kritische Punkte von L. Berechnen Sie λ_0 und λ_1 .

(c) Bestimmen Sie die beiden Hesse-Matrizen $\mathbf{H}_L(x_0 ; y_0 ; \lambda_0)$ und $\mathbf{H}_L(x_1 ; y_1 ; \lambda_1)$.

(d) Handelt es bei den kritischen Punkten um lokale Minima oder lokale Maxima der Funktion f unter der Nebenbedingung? (Begründung!)

Lösung:

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Integral $\int_1^{e^2}\int_1^2 \frac{2x}{y} + \frac{1}{x^2\sqrt{y}} + c \;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Dabei ist c eine Konstante mit dem Wert $c = -\frac{e}{e^2-1}$.

Tipp: Berechnen Sie zunächst das Doppelintegral für eine allgemeine Konstante c und setzen den Wert $-\frac{e}{e^2-1}$ erst zum Schluss ein.

Lösung: