RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Analysis

8.2.2003 (WS 2002/2003)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Ein Betrag von 10.000 € soll angelegt werden. Als alternative Anlageformen stehen zur Auswahl:

(a) Sparbrief mit einer Verzinsung von 3,5 % ;

(b) Bundesschatzbrief mit einer Verzinsung von 2,5 % im 1. Jahr, 3 % im 2. Jahr, 3,5 % im 3. Jahr, 4,5 % im 4. Jahr ;

(c) Bonussparen mit 2,5 %-iger Verzinsung und einem jährlichen Bonus von 100 €.

Wie hoch ist das Kapital nach 4 Jahren in jeder der drei Anlageformen, wenn die Zinsen bzw. der Bonus dem Konto jeweils am Ende eines Jahres gutgeschrieben und mitverzinst werden?

Welche Rendite (effektive Verzinsung) erzielt man bei den Anlageformen (b) bzw. (c) ?

$1{,}0335^4 = 1{,}14089$	$1{,}025 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}045 = 1{,}14187$	$e^{0{,}1} = 1{,}10517$	$1{,}025^4 = 1{,}10381$	$e^{0{,}14} = 1{,}15027$	$1{,}035^4 = 1{,}14752$
$10381 : 25 = 415{,}20$	$\sqrt[4]{1{,}14533} = 1{,}0345$	$\sqrt[4]{1{,}14669} = 1{,}0348$	$\sqrt[4]{1{,}14187} = 1{,}0337$	$\sqrt[4]{1{,}15027} = 1{,}0356$	$\sqrt[4]{1{,}14381} = 1{,}0342$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie – sofern existent – die globalen Extrema der Funktion $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = 2^{-x} & \text{für} \quad x < -1 \\ f_r(x) = x^3 - 3x & \phantom{\text{für}} \quad x \geq -1 \end{cases}$.

Aufgabe 3

Die Produktionskosten K in Abhängigkeit der hergestellten Menge x eines Produktes betragen $K(x) = \sqrt[4]{2x^2+200}$.

(a) Berechnen Sie die Elastizitäten von Kosten und Stückkosten bzgl. x .

(b) Um wie viel Prozent ändern sich Kosten bzw. Stückkosten approximativ, wenn die Produktionsmenge $x_0 = 20$ um $5\,\%$ erhöht wird?

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktion $f(x) = (x+1)\, e^{x^2}$.

(b) Ermitteln Sie für die Funktion f das Taylorpolynom 2. Grades, entwickelt an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der Funktionen $g(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}}$ und $h(x) = \ln(\sin(x^2+1))$.

(b) Ermitteln Sie für die Funktion $f(x) = x^3 - 8x^2 + 41x - 58$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x_0 = 5$ die beiden Iterationen x_1 und x_2 .

Aufgabe 6

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion $f(x,y) = x^3y + xy^4 - 2x^2 - \frac{5}{2}y^2 + 1$.

(b) $(x_0 ; y_0) = (0 ; 0)$ und $(x_1 ; y_1) = (1 ; 1)$ sind kritische Punkte von f.
Ermitteln Sie die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f$ an den beiden Punkten und überprüfen Sie diese auf Definitheit.
Handelt es sich bei den kritischen Punkten um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte?

Aufgabe 7

(a) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x,y) = \sqrt[3]{3x^2 - 2y^3}$ mit $x(t) = e^{2t+1}$ und $y(t) = \ln(t^2+1)$ die totale Ableitung $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

(b) Ermitteln Sie die Steigung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ der impliziten Funktion $\ln(x^4y^2+1) = 3$ im Punkt $(x_0\,;y_0)$ mit $x_0 = y_0$.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes die lokalen Extrema der Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10$ unter der Nebenbedingung $y^2 = 10 - x^2$.

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Integral $\int_1^{27} \int_1^{8} \frac{2}{9} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{y^2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.