RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Analysis

6.2.2004 (WS 2003/2004)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

(a) Auf ein Rentenkonto wird zu Beginn jeden Monats ein Betrag von 200 € eingezahlt. Die Verzinsung beträgt 3 % nominal. Die Zinsen werden dem Konto am Ende jeden Monats gutgeschrieben.
Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 35. Jahres ?

(b) Dieses Guthaben dient nach Ablauf der 35 Jahre zur Zahlung einer Rente. Zu Beginn jeden Monats wird ein Betrag von 1000 € entnommen. Die Verzinsung beträgt weiterhin 3% nominal bei monatlicher Zinszahlung.
Nach wie vielen Monaten ist das Kapital aufgebraucht, also der Kontostand 0 erreicht ?

$1{,}03^{35} = 2{,}814$	$1{,}03 \cdot \frac{1{,}03^{35}-1}{0{,}03} = 62{,}28$	$e^{1{,}05} = 2{,}858$	$1{,}0025^{420} = 2{,}854$	$802 \cdot (1{,}0025^{420}-1) = 1486{,}84$	$1{,}03^{420} = 246396$
$\frac{401}{401-148{,}684} = 1{,}59$	$\frac{\ln(1{,}59)}{\ln(1{,}0025)} = 185{,}7$	$\frac{\ln(1{,}59)}{\ln(1{,}03)} = 15{,}7$	$\frac{\ln(1{,}57)}{\ln(1{,}0025)} = 180{,}7$	$\frac{103}{103-3 \cdot 12{,}456} = 1{,}57$	$\frac{\ln(1{,}57)}{\ln(1{,}03)} = 12{,}3$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie – sofern existent – die globalen Extrema der Funktion $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} & \text{für} \quad x \leq 0 \\ f_r(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 & \phantom{\text{für}} \quad x > 0 \end{cases}$.

Aufgabe 3

Die Produktionskosten K in Abhängigkeit der hergestellten Menge x belaufen sich auf $K(x) = 5x - 3x^{2/3} + 25$.
Bei welcher Produktionsmenge x_0 werden die Stückkosten minimal?

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie für $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ die 1. Ableitung $f'(x)$.

(b) Berechnen Sie für $x_0 = 1$ die Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

(c) Ermitteln Sie für die Funktion f das Taylorpolynom 1. Grades, entwickelt an der Stelle $x_0 = 1$.

A 5

Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der Funktionen $g(x) = e^{\sqrt{x^4+1}}$ und $h(x) = \ln(x^5 \cdot 5^x)$.

(b) Ermitteln Sie für die Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 - 100x - 200$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x_0 = -5$ die beiden Iterationen x_1 und x_2 .

Aufgabe 6

Die Absätze x_1, x_2 von 2 Produkten eines Unternehmens in Abhängigkeit ihrer Preise p_1, p_2 sind

$$x_1 = 10 - 4p_1 + p_2$$
$$x_2 = 18 + 2p_1 - 5p_2 \,.$$

Die variablen Kosten pro hergestellter (= abgesetzter) Mengeneinheit (ME) betragen $k_1 = 2$ €/ME bei Produkt 1 bzw. $k_2 = 3$ €/ME bei Produkt 2. Wie müssen die Preise p_1, p_2 gewählt werden, damit der Deckungsbeitrag maximal wird?
(Deckungsbeitrag = Umsatz − variable Kosten)

Aufgabe 7

(a) Ist die Funktion $f(x, y) = \dfrac{(2x + y)^2}{\sqrt{2x^2 + y^2}}$ homogen? Wenn ja, von welchem Grade? (Rechnung!)

(b) Bestimmen Sie die beiden partiellen Elastizitäten.

(c) Um wie viel % ändert sich der aktuelle Funktionswert $f(x_0, y_0)$ für $x_0 = y_0 = 10$ näherungsweise, wenn jede Variable ceteris paribus um 3 % erhöht wird?

(d) Um wie viel % ändert sich der aktuelle Funktionswert exakt, wenn beide Variablen gleichzeitig um 3 % erhöht werden?

Aufgabe 8

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - x + 1$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(x, y, \lambda)$ auf und bestimmen Sie für diese Funktion alle notwendigen partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

(b) $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $(x_1, y_1) = (-1, 0)$ sind kritische Punkte von L. Berechnen Sie λ_0 und λ_1.

(c) Bestimmen Sie die beiden Hesse-Matrizen $\mathbf{H}_L(x_0, y_0, \lambda_0)$ und $\mathbf{H}_L(x_1, y_1, \lambda_1)$.

(d) Handelt es bei den kritischen Punkten um lokale Minima oder lokale Maxima der Funktion f unter der Nebenbedingung? (Begründung!)

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Integral $\int_1^e \int_4^9 \frac{1}{x \cdot \sqrt{y}}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x.$