RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Analysis

10.2.2007 (Wintersemester 2006/2007)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	
Unterschrift	

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Ein Betrag von 10.000 € soll angelegt werden. Als alternative Anlageformen stehen zur Auswahl:

(a) Sparbrief mit einer Verzinsung von 4 % ;

(b) Bundesschatzbrief mit einer Verzinsung von 3,1 % im 1. Jahr, 3,3 % im 2. Jahr, 4 % im 3. Jahr, 6 % im 4. Jahr ;

(c) Bonussparen mit 3,1 %-iger Verzinsung und einem jährlichen Bonus von 100 €.

Wie hoch ist das Kapital nach 4 Jahren in jeder der drei Anlageformen, wenn die Zinsen bzw. der Bonus dem Konto jeweils am Ende eines Jahres gutgeschrieben und mitverzinst werden?

Welche Rendite (effektive Verzinsung) erzielt man bei den Anlageformen (b) bzw. (c) ?

$1{,}04^4 = 1{,}16986$	$1{,}031 \cdot 1{,}033 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}06 = 1{,}17408$	$\frac{12989}{31} = 419$	$1{,}031^4 = 1{,}12989$	$e^{0{,}16} = 1{,}17351$	$1{,}041^4 = 1{,}17436$
$25 \cdot \ln(1{,}17179) = 3{,}96$	$\sqrt[4]{1{,}17351} = 1{,}0408$	$\sqrt[4]{1{,}17258} = 1{,}0406$	$\sqrt[4]{1{,}17408} = 1{,}0409$	$\sqrt[4]{1{,}17179} = 1{,}0404$	$25 \cdot \ln(1{,}17408) = 4{,}01$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie – sofern existent – die globalen Extrema der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \dfrac{x-1}{x+1} & x \leq -2 \\ f_2(x) = -\dfrac{1}{28}x^4 + \dfrac{9}{14}x^2 + 1 \quad \text{für} & -2 < x < 2 \\ f_3(x) = \dfrac{x+1}{x-1} & x \geq 2 \end{cases}.$$

Aufgabe 3

Für ein Produkt sind die Nachfragemenge x in Abhängigkeit seines Verkaufspreises p sowie die Produktionskosten K in Abhängigkeit der hergestellten Menge x gegeben durch

$$x(p) = \frac{64}{p-7}, \quad p \geq 8, \qquad K(x) = 6 + 10x - 9\sqrt[3]{x^2}.$$

Bei welchem Preis p_0 (bzw. der dazugehörigen Menge x_0) wird der Gewinn maximal?

(Voraussetzung: hergestellte Menge = nachgefragte Menge.)

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$.

(b) Berechnen Sie für $x_0 = 1$ die Funktionswerte $f(x_0)$, $f'(x_0)$ und $f''(x_0)$.

(c) Ermitteln Sie für die Funktion f das Taylorpolynom 2. Grades, entwickelt an der Stelle $x_0 = 1$.

A 5

Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der Funktionen $g(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}}$ und $h(x) = \ln(\sin(x^2+1))$.

(b) Ermitteln Sie für die Funktion $f(x) = x^3 - 8x^2 + 41x - 58$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x_0 = 5$ die beiden Iterationen x_1 und x_2 .

Aufgabe 6

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion

$$f(x,\ y) = \frac{1}{2}\,y^2 - \frac{1}{2}\,x^2 + xy + 4x + \frac{4}{x} + 2\cdot\ln(x) + 1.$$

(b) $(1; -1)$ und $(2; -2)$ sind kritische Punkte dieser Funktion.
Ermitteln Sie die Hesse-Matrizen an den kritischen Punkten und Überprüfen Sie diese auf Definitheit.
Handelt es sich bei diesen Punkten um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte?

Aufgabe 7

(a) Ist die Funktion $f(x,y) = \sqrt{\frac{x \cdot (x^2 + y^2)}{x + y}}$ homogen? Wenn ja, von welchem Grade? (Rechnung!)

(b) Bestimmen Sie die beiden partiellen Elastizitäten.

(c) Um wie viel % ändert sich der aktuelle Funktionswert $f(x_0, y_0)$ für $x_0 = y_0 = 10$ näherungsweise, wenn jede Variable ceteris paribus um 4 % erhöht wird?

(d) Um wie viel % ändert sich der aktuelle Funktionswert exakt, wenn beide Variablen gleichzeitig um 4 % erhöht werden?

Aufgabe 8

Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = \frac{y}{x+2} + x + 1$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 4 - 2xy$.

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(x, y, \lambda)$ auf und bestimmen Sie für diese Funktion alle notwendigen partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

(b) $(x_0 ; y_0) = (0 ; 2)$ und $(x_1 ; y_1) = (-4 ; 6)$ sind kritische Punkte von L. Berechnen Sie λ_0 und λ_1 .

(c) Bestimmen Sie die beiden Hesse-Matrizen $\mathbf{H}_L(x_0 ; y_0 ; \lambda_0)$ und $\mathbf{H}_L(x_1 ; y_1 ; \lambda_1)$.

(d) Handelt es bei den kritischen Punkten um lokale Minima oder lokale Maxima der Funktion f unter der Nebenbedingung? (Rechnung!)

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Integral $\int_4^9 \int_1^4 5\sqrt{\frac{x^3}{y}} - 9\sqrt{\frac{y}{x^3}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.