RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Analysis

12.02.1994 (WS 93/94)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Die endgültige Lösung muß auf das jeweilige Aufgabenblatt oder die betreffende Rückseite geschrieben werden.

Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 1

Aufgabe 1:

Für einen auf 5 Jahre festgelegten Geldbetrag in Höhe von 10.000 DM bietet ein Geldinstitut dem Anleger eine Verzinsung von 5 % jährlich zuzüglich einer jährlichen Bonuszahlung in Höhe von 100 DM. Zinsen und Bonus werden dem Konto am Ende jeden Jahres gutgeschrieben.

(a) Wie hoch ist das Guthaben am Ende des fünften Jahres?

(b) Welche Rendite (effektive Verzinsung) erzielt der Anleger?

Lösung zu Aufgabe 1:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 2

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie -sofern existent- die globalen Extrema der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} f_l(x) = -2x^2 + 4x & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ f_r(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 10 & \text{für} \quad 2 < x \leq 4 \end{cases} \qquad !$$

Lösung zu Aufgabe 2:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 3

Aufgabe 3:

Der Verkaufspreis eines Produktes beträgt 16 DM pro Stück;
die Produktionskosten K in Abhängigkeit der hergestellten Menge x belaufen sich auf

$$K(x) = 2x\sqrt{x} + 100 \quad .$$

(a) Berechnen Sie die Elastizitäten von Gewinn und Stückgewinn bezüglich der hergestellten Menge x !

(b) Um wieviel Prozent ändern sich Gewinn bzw. Stückgewinn approximativ, wenn die Produktionsmenge $x_0 = 25$ um 4 % erhöht wird?

Lösung zu Aufgabe 3:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 4

Aufgabe 4:

Sei $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

(a) Bestimmen Sie $\lim_{x \to 0} f(x)$, $f'(x)$ und $\lim_{x \to 0} f'(x)$.

(b) Wie lautet das Taylor-Polynom ersten Grades (Tangente) von $f(x)$, entwickelt an der Stelle $x_0 = 0$?

Lösung zu Aufgabe 4:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 5

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie näherungsweise die Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 128x - 192,$$

indem Sie 3 Iterationen mit Hilfe des Newton-Verfahrens durchführen, beginnend mit $x_0 = 0$.
Geben Sie x_1, x_2 und x_3 auf 2 Nachkommastellen genau an!
Überprüfen Sie die Richtigkeit Ihrer Rechnung durch Ermitteln des Funktionswertes an der vermuteten Nullstelle!

Lösung zu Aufgabe 5:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 6

Aufgabe 6:

(a) Die nachgefragten Mengen $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Produkte im Sortiment eines Herstellers in Abhängigkeit der Verkaufspreise $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ seien gegeben durch

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}) = \mathbf{v} + \mathbf{M}\cdot\mathbf{p}\ ,\ \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}\ ,\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\ ;$$

die Kosten der hergestellten (= nachgefragten) Produkte belaufen sich auf

$$K(\mathbf{x}(\mathbf{p})) = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p}) + \mathbf{u}\ ,\ \ \mathbf{k},\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\ .$$

Bestimmen Sie Gradient und Hesse-Matrix der Gewinnfunktion

$G(\mathbf{p}) = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}(\mathbf{p}) - K(\mathbf{x}(\mathbf{p}))$ in Abhängigkeit von $\mathbf{p}$!

(b) Bilden Sie alle Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion

$f(x,y) = \ln(x^3) - x(y^2 + 2) + 2y$!

(c) (1 ; 1) ist ein kritischer Punkt der Funktion unter (b).
Handelt es sich dabei um ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder um einen Sattelpunkt?

Lösung zu Aufgabe 6:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 7

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Gleichung

$$x^2 \ln(y) + zy^3 = z^4 \quad .$$

Bestimmen Sie die Steigungen $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ und $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$ jeweils in dem Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1\,;1\,;1)$.

Lösung zu Aufgabe 7:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 8

Aufgabe 8:

Bestimmen Sie mögliche lokale Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x^3 - xy + y^3$$

unter der Nebenbedingung $x \cdot y = 1$!

Lösung zu Aufgabe 8:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 9

Aufgabe 9:

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{0,25}^{0,5} \int_{0,5}^{1} \frac{1}{x^3 y^3} dx dy \qquad !$$

Lösung zu Aufgabe 9: