RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM
Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen
Analysis
10.2.1996 (WS 95/ 96)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Die endgültige Lösung muß auf das jeweilige Aufgabenblatt oder die betreffende Rückseite geschrieben werden.

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Punkte 1

Aufgabe 1

(a) Ein Betrag K wird einmalig auf ein Konto mit jährlicher Zinsgutschrift eingezahlt. Nach 15 Jahren hat sich das Kapital verdreifacht. Wie hoch war der Zinssatz p ?

(b) Die Weltbevölkerung wachse *stetig* um 2 %. In wieviel Jahren verdoppelt sie sich?

Lösung:

$15\ln(3) = 16{,}48$	$\frac{100}{15}\ln(3) = 7{,}32$	$3\ln(15) = 8{,}12$	$15\ln(1{,}03) = 0{,}44$	$\sqrt[15]{3} = 1{,}076$	$\sqrt[3]{15} = 2{,}47$
$\frac{100}{1{,}02} = 98{,}04$	$100\ln(2) = 69{,}31$	$50\ln(2) = 34{,}66$	$\frac{\ln(2)}{\ln(1{,}02)} = 35{,}0$	$2\ln(100) = 9{,}21$	$100\ln(1{,}02) = 1{,}98$

Punkte 2

Aufgabe 2

Bestimmen Sie – sofern existent – die globalen Extrema der Funktion
$$f(x) = \begin{cases} f_l(x) = 1 + \dfrac{x^3+8}{x^3-8} & \text{für } x \leq 0 \\ f_r(x) = 1 + \dfrac{x^3-8}{x^3+8} & \phantom{\text{für }} x > 0 \end{cases}$$
!

Lösung:

Punkte 3

Aufgabe 3

Die Produktionskosten K in Abhängigkeit der hergestellten Menge x eines Produktes seien $K(x) = \sqrt{2x+100}$.

(a) Berechnen Sie die Elastizitäten von Kosten und Stückkosten bzgl. x !

(b) Um wieviel Prozent ändern sich Kosten bzw. Stückkosten approximativ, wenn die Produktionsmenge $x_0 = 100$ um 3 % erhöht wird?

Lösung:

Punkte 4

Aufgabe 4

Nähern Sie die Funktion $f(x) = e^{g(x)}$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch ein Taylorpolynom 2. Grades an !

Dabei gelte $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1 = g''(0)$.

Lösung:

Punkte 5

Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der drei Funktionen

$f(x) = x^3 + x^2 + 24x - 96$, $g(x) = \sqrt[4]{x^4+1}$, $h(x) = 2^{3x} - e^{4x-1} + 5$!

(b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ für die obige Funktion f die beiden Versuchspunkte x_1 und x_2 !

Lösung:

Punkte 6

Aufgabe 6

(a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix der Funktion $f(x, y) = xy^2 - 2xy - x^2 + 1$.

(b) $(0; 0)$, $(0; 2)$ und $(-\frac{1}{2}; 1)$ sind kritische Punkte dieser Funktion mit den Hesse-Matrizen

$$\mathbf{H}_f(0; 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_f(0; 2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{H}_f(-\tfrac{1}{2}; 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Handelt es sich bei diesen Punkten um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte? (Begründung!)

Lösung:

Punkte 7

Aufgabe 7

Gegeben sei die Produktionsfunktion $f(x, y) = \ln(x^2y^2 + 1)$. Für die aktuelle Produktion (x_0, y_0) gelte $x_0 = y_0$.
Wieviele Einheiten von y können (näherungsweise) durch den zusätzlichen Einsatz einer Einheit von x substituiert werden, wenn die Produktion konstant bleiben soll?

Lösung:

Punkte 8

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = 4x + 2y$ unter der Nebenbedingung $2x^2 + y^2 = 12$!

Lösung:

Punkte 9

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Integral $\int_1^e \int_4^9 \frac{1}{y \cdot \sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, wobei $e = 2{,}718...$ die Eulersche Zahl ist !

Lösung: