



KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Analysis

6.2.1999 (WS 98/99)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.

Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift
--------	------	--------------

Aufgabe 1

A 1



- (a) Ein Betrag K wird *einmalig* auf ein Konto mit *monatlicher* Zinsgutschrift eingezahlt. Nach 10 Jahren hat sich das Kapital verdoppelt. Wie hoch war der Zinssatz p ?
- (b) Wieviel Jahre dauert es, bis sich der Wert des Geldes halbiert, wenn mit einer *stetigen* Inflation von 1% gerechnet werden muß ?

Lösung:

$\ln(2) = 0,693$	$\sqrt[10]{2} = 1,0718$	$\sqrt[120]{2} = 1,00579$	$12 \cdot 0,579 = 6,95$	$e^{0,12} = 1,13$	$\ln(120) = 4,79$
------------------	-------------------------	---------------------------	-------------------------	-------------------	-------------------

Aufgabe 2

A 2



Bestimmen Sie – sofern existent – die globalen Extrema der Funktion $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = -x^2 - 2x + 9 \\ f_r(x) = x^2 - 10x + 17 \end{cases}$ für $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 2 < x \leq 4 \end{cases}$.

Lösung:

Aufgabe 3

A 3



Für ein Produkt seien die Nachfragemenge x in Abhängigkeit seines Verkaufspreises p für $p \geq 20$ gegeben durch

$$x(p) = \frac{900}{p-19}.$$

Die Produktionskosten K in Abhängigkeit der hergestellten Menge x betragen $K(x) = 400 + 20x - 20\sqrt{x}$.

Bei welchem Preis p_0 (bzw. der dazugehörigen Menge x_0) wird der Gewinn maximal?

(Voraussetzung: hergestellte Menge = nachgefragte Menge.)

Lösung:

Aufgabe 4

A 4



Nähern Sie die Funktion $f(x) = e^{\sin(\ln(x+1))}$ an der Stelle $x_0 = 0$ durch ein Taylorpolynom 2. Grades an.

Lösung:

Aufgabe 5

A 5



- (a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der drei Funktionen

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 100x - 200, \quad g(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}, \quad h(x) = \ln(x^4 + 4^x).$$

- (b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x_0 = -5$ für die obige Funktion f die beiden Iterationswerte x_1 und x_2 .

Lösung:

Aufgabe 6

A 6



- (a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion $f(x, y) = x^4y + xy^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2y^2 + 1$.
- (b) $(0; 0)$ und $(1; 1)$ sind kritische Punkte von f . Geben Sie die Hesse-Matrizen $\mathbf{H}_f(0; 0)$ und $\mathbf{H}_f(1; 1)$ an.
- (c) Handelt es sich bei den kritischen Punkten um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte? (Begründung!)

Lösung:

Aufgabe 7

A 7



Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \frac{(x + 2y)^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}$.

- (a) Ist die Funktion homogen? Wenn ja, von welchem Grade?
- (b) Bestimmen Sie die beiden partiellen Elastizitäten!
- (c) Um wieviel % ändert sich der aktuelle Funktionswert $f(x_0, y_0)$ für $x_0 = y_0 = 10$ näherungsweise, wenn jede Variable ceteris paribus um 3 % erhöht wird?
- (d) Um wieviel % ändert sich der aktuelle Funktionswert exakt, wenn beide Variablen gleichzeitig um 3 % erhöht werden?

Lösung:

Aufgabe 8

A 8



Gesucht sind die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 - x + 1$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

- (a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(x, y, \lambda)$ auf und bestimmen Sie für diese Funktion alle notwendigen partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.
- (b) $(1; 0; 0)$ und $(-1; 0; 0)$ sind kritische Punkte von L .
Geben Sie die beiden Hesse-Matrizen $\mathbf{H}_L(1; 0; 0)$ und $\mathbf{H}_L(-1; 0; 0)$ an.
- (c) Handelt es sich bei den beiden Punkten um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte der Funktion f unter der Nebenbedingung? (Begründung!)

Lösung:

Aufgabe 9

A 9



Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \int_1^4 4xy - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} \, dy \, dx$.

Lösung: