RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

A n a l y s i s

5.2.2000 (WS 1999/2000)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

A 1

Aufgabe 1

(a) Auf ein Rentenkonto wird zu Beginn jeden Monats ein Betrag von 100 DM eingezahlt. Die Verzinsung beträgt 3 % nominal. Die Zinsen werden dem Konto am Ende jeden Monats gutgeschrieben.
Wie hoch ist das Guthaben am Ende des 40. Jahres ?

(b) Dieses Guthaben dient nach Ablauf der 40 Jahre zur Zahlung einer Rente. Zu Beginn jeden Monats wird ein Betrag von 1000 DM entnommen. Die Verzinsung beträgt weiterhin 3% nominal bei monatlicher Zinszahlung.
Nach wie vielen Monaten ist das Kapital aufgebraucht ?

Lösung:

$1{,}03^{40} = 3{,}262$	$1{,}03\cdot\frac{1{,}03^{40}-1}{0{,}03} = 77{,}66$	$e^{1{,}2} = 3{,}320$	$1{,}0025^{480} = 3{,}315$	$401\cdot(1{,}0025^{480}-1) = 928{,}37$	$1{,}03^{480} = 1451670$
$\frac{401}{401-92{,}837} = 1{,}30$	$\frac{\ln(1{,}30)}{\ln(1{,}0025)} = 105{,}47$	$\frac{\ln(1{,}30)}{\ln(1{,}03)} = 8{,}88$	$\frac{\ln(1{,}29)}{\ln(1{,}0025)} = 101{,}98$	$\frac{103}{103-3\cdot 7{,}766} = 1{,}29$	$\frac{\ln(1{,}29)}{\ln(1{,}03)} = 8{,}61$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie – sofern existent – die globalen Extrema der Funktion $f(x) = \begin{cases} f_l(x) = 3^{x^2} & \text{für} \quad x \leq 0 \\ f_r(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1 & \phantom{\text{für}} \quad x > 0 \end{cases}$.

Lösung:

Aufgabe 3

Der Verkaufspreis eines Produktes beträgt 8 DM pro Stück; die Produktionskosten K in Abhängigkeit der hergestellten Menge x sind gegeben durch die Funktion $K(x) = x \cdot \sqrt[3]{x} + 100$.

Bei welcher Produktionsmenge x_0 wird der Gewinn maximal ?

Lösung:

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $f'(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ für die Funktion $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ und $x_0 = 0$.

(b) Wie lautet das Taylor-Polynom ersten Grades (Tangente) von $f(x)$, entwickelt an der Stelle x_0 ?

Lösung:

Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung der drei Funktionen
$f(x) = x^3 + 7x^2 + 36x + 72$, $\quad g(x) = e^{\sin(x^2+1)}$, $\quad h(x) = \sqrt{\ln(x^4 + 1)}$.

(b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ für die obige Funktion f die beiden Iterationswerte x_1 und x_2 .

Lösung:

Aufgabe 6

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion $f(x, y) = 4x^3 - 4y^3 + 2x^2y^2 - 8xy + 1$.

(b) $(x_0, y_0) = (0; 0)$ und $(x_1, y_1) = (-1; 1)$ sind kritische Punkte von f. Ermitteln Sie die Hesse-Matrix $\mathbf{H}_f$ an den beiden Punkten und überprüfen Sie diese auf Definitheit. Handelt es sich bei den kritischen Punkten um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte?

Lösung:

Aufgabe 7

(a) Ist die Funktion $f(x,y) = \sqrt{\frac{x\cdot(x^2+y^2)}{x+y}}$ homogen? Wenn ja, von welchem Grade?

(b) Bestimmen Sie die beiden partiellen Elastizitäten!

(c) Um wie viel % ändert sich der aktuelle Funktionswert $f(x_0, y_0)$ für $x_0 = y_0 = 10$ näherungsweise, wenn jede Variable ceteris paribus um 4 % erhöht wird?

(d) Um wie viel % ändert sich der aktuelle Funktionswert exakt, wenn beide Variablen gleichzeitig um 4 % erhöht werden?

Lösung:

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f(x,y) = x-y$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2 = 2y+7$ mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes.

Lösung:

A 9

Aufgabe 9

Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \int_1^4 6xy^2 + \frac{y}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

Lösung: