RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM
Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen
Lineare Algebra
26.5.2000 (SS 2000)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ eine Zahl $a > 0$ so, dass $|\,\mathbf{A}'\cdot\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}\,| = 3$ ist.

Lösung:

A 2

Aufgabe 2

Ein Unternehmen verkauft die Maschinen M_1, M_2, M_3, M_4 in die Länder L_1, L_2, L_3 . Die Absätze pro Land und Maschine (in Stück) sowie die Verkaufspreise der Maschinen (in TDM / Stück) liegen in Tabellenform vor:

	M_1	M_2	M_3	M_4
L_1	3	1	1	3
L_2	9	2	1	1
L_3	3	2	3	1
Verkaufspreise	10	20	30	40

(a) Stellen Sie die Angaben durch eine Matrix und einen Vektor dar.
Verwenden Sie *ausschließlich* die Matrix-Vektorschreibweise zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Welche Umsatzerlöse werden in jedem der drei Länder erzielt?

(c) Wie hoch ist der Absatz für jede der vier Maschinen?

(d) Welchen Gesamtumsatz erwirtschaftet das Unternehmen?

Lösung:

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Inverse der partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{u} \\ \mathbf{u}' & 3 \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Für eine partitionierte Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulärer Untermatrix $\mathbf{A}_{11}$ und regulärer Hilfsmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\, \mathbf{A}_{11}^{-1}\, \mathbf{A}_{12}$ berechnet sich die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ durch $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\, \mathbf{C}^{-1}\, \mathbf{A}_{21}\, \mathbf{A}_{11}^{-1}) & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\, \mathbf{A}_{12}\, \mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1}\, \mathbf{A}_{21}\, \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}$.

Lösung:

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$ einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie (a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an.

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	1	1	6
2	3	3	16
1	2	2	11

Lösung zu (a)

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	1	1	6
2	3	3	16
3	3	5	22

Lösung zu (b)

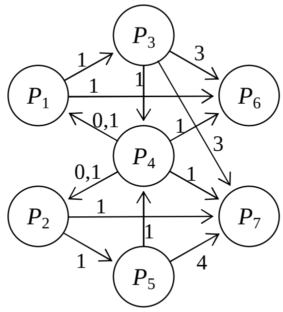
(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	1	1	6
2	3	3	16
4	5	5	28

Lösung zu (c)

A 6

Aufgabe 6



Die Produkte P_6 , P_7 werden aus Rohstoffen P_1 , P_2 über Zwischenprodukte P_3 , P_4 , P_5 gefertigt. Der Produktionsprozess ist durch einen Gozintografen dargestellt.

Wie viele Mengeneinheiten (ME) P_1 , ... , P_5 werden zur Herstellung von 10 ME P_6 und 10 ME P_7 insgesamt benötigt?

Hinweis: Die Zahl 4 an dem Pfeil von P_5 nach P_7 bedeutet beispielsweise, dass zur Produktion *einer* ME P_5 *vier* ME P_3 benötigt werden.

Lösung:

Aufgabe 7

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

(b) Berechnen Sie $|\,\mathbf{A}\,|$.

(c) Ist A regulär ? (Begründung !)

(d) Welche Aussage lässt sich über die Definitheit von **A** machen ? (Begründung !)

Lösung:

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2'$ einer 3×2-Matrix $\mathbf{A}$ ergibt

$$w_1 = \frac{8}{\sqrt{5}}, \quad w_2 = 1, \quad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix $\mathbf{A}$? (Begründung!)

(b) Welche Eigenschaft besitzt in diesem Fall die Matrix $\mathbf{A}^+ = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2'$?

(Dabei ist $w_i^+ = \frac{1}{w_i}$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$, falls $w_i = 0$.)

(c) Welche der Lösungsmengen - genau eine Lösung - unendlich viele Lösungen - keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$? (Begründung!)

Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems ?

(d) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$.

Lösung:

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1, P_2, P_3 an den Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefasst:

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	1	1	4	30
F_2	2	1	5	50
F_3	8	5	25	215
DB	13	8	35	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf!

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.	θ
x_2	1	1	4	1	0	0	30	
u_2	1	0	1	–1	1	0	20	
u_3	3	0	5	–5	0	1	65	
z	–5	0	–3	8	0	0	240	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?
(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
x_2	0	1	3	2	–1	0	10
x_1	1	0	1	–1	1	0	20
u_3	0	0	2	–2	–3	1	5
z	0	0	2	3	5	0	340

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1, x_2, x_3 ?

– Welcher DB wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der DB, wenn die Kapazität der Fertigungsstelle 1 um eine Einheit erhöht wird?