RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

1.6.2001 (SS 2001)

| | |
|---|---|
| Name | |
| Vorname | |
| Teilnehmer-Nr. | |

## Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

## Bitte nicht ausfüllen

| Punkte | Note | Unterschrift |
|---|---|---|
| | | |

## Aufgabe 1

Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2a \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, dass Spur $( \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{A}^{-1} ) = | \mathbf{D}^{-1} \mathbf{v} |$ ist.

**Lösung:**

## Aufgabe 2

Ein Unternehmen stellt aus den Rohstoffen $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$ die Zwischenprodukte $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$ her. Aus diesen Zwischenprodukten werden die Vorprodukte $V_1, V_2, V_3, V_4$ erzeugt und daraus die Endprodukte $E_1, E_2, E_3$.
Die zur Herstellung benötigten Mengen sind in drei Tabellen zusammengefaßt:

| | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | $Z_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 1 | 2 | 0 | 2 |
| $R_2$ | 1 | 0 | 3 | 1 |
| $R_3$ | 2 | 1 | 2 | 0 |
| $R_4$ | 1 | 3 | 0 | 1 |
| $R_5$ | 1 | 1 | 1 | 2 |

| | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $V_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $Z_1$ | 1 | 0 | 3 | 2 |
| $Z_2$ | 1 | 2 | 0 | 1 |
| $Z_3$ | 1 | 2 | 0 | 1 |
| $Z_4$ | 1 | 1 | 2 | 2 |

| | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ |
|---|---|---|---|
| $V_1$ | 1 | 0 | 2 |
| $V_2$ | 0 | 0 | 5 |
| $V_3$ | 5 | 0 | 0 |
| $V_4$ | 0 | 5 | 0 |

Das Produktionssoll beträgt 10 ME für $E_1$ , 10 ME für $E_2$ und 10 ME für $E_3$.

(a) Stellen Sie die obigen Angaben durch drei Matrizen und einen Vektor dar.
Verwenden Sie ausschließlich diese Matrizen bzw. diesen Vektor zur Lösung der Teilaufgaben (b),(c),(d).

(b) Bestimmen Sie die Matrix des Rohstoffverbrauchs für die Vorprodukte $V_1$ , .... , $V_4$ .

(c) Ermitteln Sie die Matrix des Rohstoffverbrauchs für die Endprodukte $E_1$ , $E_2$ , $E_3$ .

(d) Wie hoch ist der Rohstoffbedarf zur Herstellung des Produktionssolls ?

**Lösung:**

## Aufgabe 3

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ sei eine partitionierte 6×6-Matrix mit 2×2-Untermatrizen. Bestimmen Sie $\mathbf{M}^4$ und $\mathbf{M}^5$ .

**Lösung:**

## Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung **A** = **L** · **R** einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie (a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$ .

**Lösung:**

A 5

## Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an.

(a)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 10 |
| 2 | 1 | 3 | 11 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |

Lösung zu (a)

(b)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 10 |
| 2 | 1 | 3 | 11 |
| 4 | 5 | 9 | 31 |

Lösung zu (b)

(c)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | r.S. |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 10 |
| 2 | 1 | 3 | 11 |
| 3 | 2 | 1 | 14 |

Lösung zu (c)

## Aufgabe 6

Die drei Hilfsabteilungen $N_1$ , $N_2$ , $N_3$ geben an die beiden Hauptabteilungen $H_1$ , $H_2$ Leistungen ab, "beliefern" sich aber auch gegenseitig. Die Höhe dieses Leistungstransfers - gemessen in Leistungseinheiten (LE) - wird durch folgende Tabelle abgebildet:

| | | Empfänger | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ | $H_1$ | $H_2$ | Primärkosten |
| Lieferant | $N_1$ | 1 | 4 | 5 | 16 | 10 | 600 |
| | $N_2$ | 5 | 2 | 5 | 8 | 10 | 800 |
| | $N_3$ | 5 | 4 | 3 | 12 | 14 | 1400 |

(a) Bestimmen Sie die Verrechnungspreise $p_i$ in DM/LE für jede der Abteilungen $N_i$ .

(b) Verteilen Sie die primären Gesamtkosten auf die Hauptabteilungen $H_1$ , $H_2$ .

**Lösung:**

## Aufgabe 7

Eine symmetrische 3×3-Matrix **A** besitzt die Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{1}{4} = \lambda_3\,, \qquad \mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

(a) Welche Aussage lässt sich über die Definitheit von **A** machen ? (Begründung !)

(b) Woran erkennt man, dass **A** regulär ist ? Bestimmen Sie die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$.

(c) Berechnen Sie die Spur von $\mathbf{A}^{-1}$.

(d) Berechnen Sie $|\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}|$.

**Lösung:**

## Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{UWV}' = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2' + w_3\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3'$ einer 4×3-Matrix **A** ergibt

$$w_1 = 2\sqrt{3}\,,\quad w_2 = \sqrt{6},\quad w_3 = 2,\quad \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix **A** ? (Begründung!)

(b) Welche Eigenschaft besitzt in diesem Fall die Matrix $\mathbf{A}^+ = \mathbf{VW}^+\mathbf{U}' = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2' + \ldots + w_n^+\mathbf{v}_n\mathbf{u}_n'$ ?

Dabei ist $\mathbf{W}^+ = \begin{pmatrix} w_1^+ & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_n^+ \end{pmatrix},\quad w_i^+ = \begin{cases} \frac{1}{w_i} & \text{falls } w_i \neq 0 \\ 0 & \phantom{\text{falls }} w_i = 0 \end{cases}.$

(c) Welche der Lösungsmengen - genau eine Lösung - unendlich viele Lösungen - keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$? (Begründung!)

(d) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\cdot\mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems ?

Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$.

**Lösung:**

# Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ an den Fertigungsstellen $F_1$, $F_2$, $F_3$ her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefasst:

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | Kapazität |
|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | 2 | 5 | 1 | 50 |
| $F_2$ | 8 | 25 | 5 | 215 |
| $F_3$ | 1 | 4 | 1 | 30 |
| DB | 13 | 35 | 8 | |

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf!

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| | | | | | | | |
| $z$ | | | | | | | |

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. | θ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | –1 | 20 | |
| $u_2$ | 3 | 5 | 0 | 0 | 1 | –5 | 65 | |
| $x_3$ | 1 | 4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 30 | |
| $z$ | –5 | –3 | 0 | 0 | 0 | 8 | 240 | |

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?
(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | r.S. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | –1 | 20 |
| $u_2$ | 0 | 2 | 0 | –3 | 1 | –2 | 5 |
| $x_3$ | 0 | 3 | 1 | –1 | 0 | 2 | 10 |
| $z$ | 0 | 2 | 0 | 5 | 0 | 3 | 340 |

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen $x_1$, $x_2$, $x_3$ ?

– Welcher DB wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der DB, wenn die Kapazität der Fertigungsstelle 1 um eine Einheit erhöht wird?