RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

6.6.2002 (SS 2002)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

A 1

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, dass $|\,\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{A}\,| = \mathrm{Spur}(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{A})$ ist.

Aufgabe 2

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1, P_2, P_3 auf den Maschinen M_1, M_2 her. Die Herstellung kann an zwei alternativen Standorten S_1, S_2 mit unterschiedlichen Produktionskosten erfolgen. Die Fertigungszeiten pro Maschine (in Stunden/Stück), das Produktionssoll sowie die Kosten pro Maschinenstunde an den beiden Standorten liegen in Tabellenform vor:

Produktionszeiten	M_1	M_2	Produktionssoll
P_1	1	1	40
P_2	0	2	30
P_3	2	0	30

Maschinenkosten	S_1	S_2
M_1	50	75
M_2	100	75

(a) Stellen Sie die Angaben durch zwei Matrizen und einen Vektor dar.
Verwenden Sie *ausschließlich* diese Größen zur Lösung der Teilaufgaben (b),(c),(d).

(b) Ermitteln Sie die Matrix **K** der Fertigungskosten (k_{ij} = Fertigungskosten von Produkt P_i am Standort S_j).

(c) Wie lange wird jede der Maschinen M_1, M_2 zur Herstellung des Produktionssolls insgesamt eingesetzt?

(d) Welche Gesamtkosten entstünden dabei an jedem der beiden Standorte?

Aufgabe 3

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{I} & \mathbf{A} \end{pmatrix}$ sei eine die partitionierte Matrix mit orthonormaler Untermatrix $\mathbf{A}$. Bestimmen Sie $(\mathbf{M}'\,\mathbf{M})^3$.

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$ einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an.

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	3	5	14
1	2	3	10
3	4	5	22

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	3	5	14
1	2	3	10
3	4	15	32

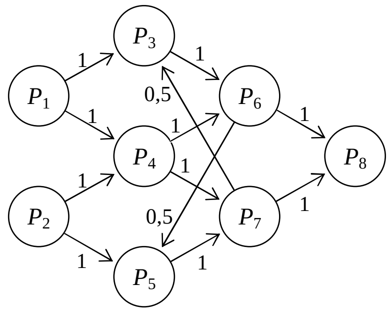
(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	3	5	14
1	2	3	10
3	4	5	32

Aufgabe 6

Ein Produkt P_8 wird über Zwischenprodukte P_1 ,..., P_7 hergestellt. Der Produktionsprozess ist durch einen Gozintografen dargestellt. Wie viele Mengeneinheiten (ME) P_1 ,..., P_7 werden zur Herstellung *einer* ME P_8 benötigt?

Hinweis: Die Zahl 1 an dem Pfeil von P_6 nach P_8 bedeutet beispielsweise, dass zur Produktion einer ME P_8 *eine* ME P_6 benötigt wird.



Aufgabe 7

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Berechnen Sie $|\,\mathbf{A}\,|$.

(c) Ist **A** regulär ? (Begründung !)

(d) Welche Aussage lässt sich über die Definitheit von **A** machen ? (Begründung !)

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2'$ einer 2×2-Matrix **A** ergibt

$$w_1 = 5,\quad w_2 = 0\,,\quad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix **A** ? (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen - genau eine Lösung - unendlich viele Lösungen - keine Lösung erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = 25\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$? (Begründung!)

(c) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\cdot\mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems ?
Dabei ist $\mathbf{A}^+ = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2'$ mit $w_i^+ = 1/w_i$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$ sonst.

(d) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$.

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1 , P_2 , P_3 an den Fertigungsstellen F_1 , F_2 , F_3 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefasst:

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	2	1	1	40
F_2	1	1	2	50
F_3	2	2	2	60
DB	2	1	3	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf!

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.	θ
u_1	1,5	0,5	0	1	–0,5	0	15	
x_3	0,5	0,5	1	0	0,5	0	25	
u_3	1	1	0	0	–1	1	10	
z	–0,5	0,5	0	0	1,5	0	75	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?
(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
u_1	0	–1	0	1	1	–1,5	0
x_3	0	0	1	0	1	–0,5	20
x_1	1	1	0	0	–1	1	10
z	0	1	0	0	1	0,5	80

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1 , x_2 , x_3 ?

– Welcher DB wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der DB, wenn die Kapazität der Fertigungsstelle 2 um eine Einheit erhöht wird?