RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

28.5.2004 (SS 2004)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	
Unterschrift	

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Existieren reelle Zahlen $a, b, c, u, v,$ so dass die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a+u & a+v \\ b & b+u & b+v \\ c & c+u & c+v \end{pmatrix}$ regulär wird? (Begründung!)

Aufgabe 2

Ein Unternehmen stellt aus den Rohstoffen R_i die Zwischenprodukte Z_j und daraus die Endprodukte E_k her. Die dazu benötigten Einsatzmengen, die Rohstoffkosten sowie das Produktionssoll liegen in Tabellenform vor:

	Z_1	Z_2	Z_3	Rohstoffkosten
R_1	2	1	1	3
R_2	3	0	2	1
R_3	0	2	2	2
R_4	1	3	1	1

	E_1	E_2
Z_1	1	0
Z_2	1	2
Z_3	1	2
Produktionssoll	10	5

(a) Stellen Sie die Angaben durch zwei Matrizen und zwei Vektoren dar.
Verwenden Sie *ausschließlich* diese Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Welche Rohstoffmengen sind zur Produktion je einer Mengeneinheit (ME) der Endprodukte E_k notwendig?

(c) Wie hoch ist der Bedarf an Rohstoffen zur Fertigung des Produktionssolls?

(d) Wie hoch sind die dabei insgesamt entstehenden Rohstoffkosten?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Inverse der partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{B}^{-3} \\ \mathbf{B} & 2\,\mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}$ regulär.

Hinweis: Für eine partitionierte Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulärer Untermatrix $\mathbf{A}_{11}$ und regulärer Hilfsmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}$ berechnet sich die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ durch $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}\,(\,\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,) & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$ einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie (a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems an, bei ∞ vielen Lösungen in Parameterform.

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	–7	4
–2	–3	12	–7
1	1	–5	3

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	–7	4
–2	–3	12	–7
3	5	–19	12

(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	–7	4
–2	–3	12	–7
3	1	–6	7

A 6

Aufgabe 6

Die drei Hilfsabteilungen N_1, N_2, N_3 geben an die beiden Hauptabteilungen H_1, H_2 Leistungen ab, "beliefern" sich aber auch gegenseitig. Die Höhe dieses Leistungstransfers - gemessen in Leistungseinheiten (LE) - sowie die Primärkosten der Hilfsabteilungen werden durch folgende Tabelle abgebildet:

		Empfänger					
		N_1	N_2	N_3	H_1	H_2	Primärkosten
Lieferant	N_1	-	3	4	2	3	380
	N_2	2	-	4	4	8	360
	N_3	2	3	-	5	14	200

(a) Bestimmen Sie die Verrechnungspreise p_i in € / LE für jede der Abteilungen N_i .

(b) Verteilen Sie die primären Gesamtkosten auf die Hauptabteilungen H_1, H_2 .

Aufgabe 7

Die Spur einer symmetrischen 2×2-Matrix **A** beträgt 6, die Determinante ist 8.

(a) Welche beiden Bedingungen ergeben sich daraus für die Eigenwerte λ_1 , λ_2 von **A**?

(b) Berechnen Sie λ_1 und λ_2 .

(c) Welche Aussage lässt sich über die Definitheit von **A** machen ? (Begründung !)

(d) Berechnen Sie $|\,(\frac{1}{4}\mathbf{A})^{-1}\,|$.

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}'$ einer 2×2-Matrix **A** ergibt $\mathbf{A} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{5}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix **A**? (Begründung!)

(b) Welche Eigenschaft besitzt in diesem Fall die Matrix $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{W}^+\mathbf{U}' = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2'$?

Dabei ist $\mathbf{W}^+ = \begin{pmatrix} w_1^+ & 0 \\ 0 & w_2^+ \end{pmatrix}$, $w_i^+ = 1/w_i$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$ sonst.

(c) Welche der Lösungsmengen – genau eine Lösung – unendlich viele Lösungen – keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ 15 \end{pmatrix}$? (Begründung!)

(d) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems?

(e) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$.

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1, P_2, P_3 an den Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3, F_4 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (*DB*) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefasst:

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	1	2	0	20
F_2	2	0	1	40
F_3	0	1	2	30
F_4	1	1	1	29
DB	10	5	5	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des *DB* auf!

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z								

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_1	1	2	0	1	0	0	0	20	
x_3	0	–4	1	–2	1	0	0	0	
u_3	0	9	0	4	–2	1	0	30	
u_4	0	3	0	1	–1	0	1	9	
z	0	–5	0	0	5	0	0	200	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen?
Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!
Welche Variable ist aus der Basis zu eliminieren?

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_1	1	0	0	1/3	2/3	0	–2/3	14
x_3	0	0	1	–2/3	–1/3	0	4/3	12
u_3	0	0	0	1	1	1	–3	3
x_2	0	1	0	1/3	–1/3	0	1/3	3
z	0	0	0	5/3	10/3	0	5/3	215

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1, x_2, x_3 ?

– Welcher *DB* wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der *DB*, wenn die Kapazität der Fertigungsstelle 2 um eine Einheit erhöht wird?