RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

3.6.2005 (Sommersemester 2005)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	
Unterschrift	

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 6 & -8 \\ -3 & 6 & -10 & 12 \\ 4 & -8 & 12 & a \end{pmatrix}$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, dass $|\mathbf{A}| = 1$ ist.

(b) Welche Aussage lässt sich dann über die Definitheit von **A** treffen ? (Begründung!)

Aufgabe 2

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_i auf den Maschinen M_j her. Die dazu benötigten Zeiten, das Produktionssoll sowie die Kosten pro Maschinenstunde liegen in Tabellenform vor:

	M_1	M_2	M_3	Produktionssoll
P_1	5	0	10	24
P_2	0	12	0	15
P_3	10	5	0	12
Maschinenkosten	70	100	85	

(Benötigte Zeiten in Minuten / Stück)

(a) Stellen Sie die obigen Angaben durch eine Matrix und zwei Vektoren dar.

Verwenden Sie *ausschließlich* diese Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Welche Maschinenkosten verursacht die Fertigung je eines Stückes der Produkte P_i ?

(c) Wie lange wird jede der Maschinen M_j zur Herstellung des Produktionssolls insgesamt eingesetzt ?

(d) Welche Maschinenkosten entstehen dabei insgesamt ?

Aufgabe 3

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}-\mathbf{I} \end{pmatrix}$ sei eine partitionierte Matrix mit idempotenter Untermatrix $\mathbf{A}$. Bestimmen Sie $\mathbf{M}^4$ und $\mathbf{M}^5$.

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$ einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ -15 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems an, bei ∞ vielen Lösungen in Parameterform.

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	−2	1	2
2	−3	1	3
3	2	1	4

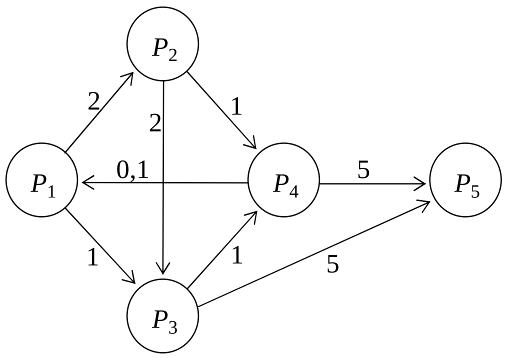
(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	−2	1	2
2	−3	1	3
4	−7	3	8

(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	−2	1	2
2	−3	1	3
1	−1	0	1

Aufgabe 6



Ein Produkt P_5 wird über Zwischenprodukte $P_1, ..., P_4$ hergestellt. Der Produktionsprozess ist durch einen Gozintografen dargestellt. Wie viele Mengeneinheiten (ME) $P_1, ..., P_4$ werden zur Herstellung *einer* ME P_5 benötigt?

Hinweis: Die Zahl 5 an dem Pfeil von P_4 nach P_5 bedeutet beispielsweise, dass zur Produktion *einer* ME P_5 *fünf* ME P_4 benötigt werden.

Aufgabe 7

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Berechnen Sie $|\,\mathbf{A}\,|$.

(c) Ist **A** regulär ? (Begründung !)

(d) Welche Aussage lässt sich über die Definitheit von **A** machen ? (Begründung !)

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2' + w_3\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3'$ einer 3×3-Matrix **A** ergibt

$$w_1 = 3\sqrt{6}\,,\quad w_2 = 2,\quad w_3 = 0,\quad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix **A** ? (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen - genau eine Lösung - unendlich viele Lösungen - keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$? (Begründung!)

(c) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\cdot\mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems ?

Dabei ist $\mathbf{A}^+ = w_1^+\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{u}_1' + w_2^+\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{u}_2' + w_3^+\,\mathbf{v}_3\,\mathbf{u}_3'$ mit $w_i^+ = 1/w_i$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$ sonst.

(d) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$.

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1, P_2, P_3 an den Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3, F_4 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (*DB*) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefasst:

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	0	1	1	50
F_2	1	1	0	30
F_3	1	0	1	40
F_4	1	1	1	65
DB	20	15	10	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des *DB* auf!

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z								

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
u_1	0	2	0	1	1	–1	0	40	
x_1	1	1	0	0	1	0	0	30	
x_3	0	–1	1	0	–1	1	0	10	
u_4	0	1	0	0	0	–1	1	25	
z	0	–5	0	0	10	10	0	700	

– Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen?

– Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!

– Welche Variable ist aus der Basis zu eliminieren?

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_2	0	1	0	0,5	0,5	–0,5	0	20
x_1	1	0	0	–0,5	0,5	0,5	0	10
x_3	0	0	1	0,5	–0,5	0,5	0	30
u_4	0	0	0	–0,5	–0,5	–0,5	1	5
z	0	0	0	2,5	12,5	7,5	0	800

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1, x_2, x_3 ?

– Welcher *DB* wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der *DB*, wenn die Kapazität der Fertigungsstelle 2 um eine Einheit erhöht wird?