RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

19.5.2006 (Sommersemester 2006)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	
Unterschrift	

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 0 & a & a \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, dass $|\,\mathbf{A}^{-1}\,| \cdot \mathrm{Spur}(\,\mathbf{A}'\mathbf{A}\,) = 1$ ist.

Aufgabe 2

In der Mensa werden die Menus M_1, M_2, M_3 angeboten. Die im wesentlichen benötigten Zutaten $Z_1, \ldots, Z_6$ (in kg / Menu), die Einkaufspreise der Zutaten (in € / kg) sowie die Anzahl ausgegebener Menus liegen in Tabellenform vor.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Auszugebende Menus
M_1	–	–	0,2	0,1	–	0,1	4000
M_2	0,2	–	–	0,1	–	0,2	2000
M_3	0,1	0,1	–	–	0,2	–	4000
Preise	5	3	7	2	6	4	

(a) Stellen Sie die Angaben durch eine Matrix und zwei Vektoren dar.

Verwenden Sie *ausschließlich* diese Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Wie hoch sind die Kosten der Zutaten pro Menu für M_1, M_2 bzw. M_3 ?

(c) Welche Mengen an Zutaten $Z_1, \ldots, Z_6$ werden insgesamt zur Herstellung aller ausgegebenen Menus benötigt?

(d) Wie hoch sind die dabei entstehenden Gesamtkosten für alle Zutaten?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Inverse der partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{I} \\ 2\,\mathbf{B}^{-1} + \mathbf{I} & \mathbf{B} + \mathbf{I} \end{pmatrix}$.

Hinweis: Die Inverse $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}$ einer partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulärer Untermatrix $\mathbf{A}_{11}$ und regulärer Hilfsmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}$ berechnet sich durch $\mathbf{M}_{11} = \mathbf{A}_{11}^{-1}\,(\,\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,)$,
$\mathbf{M}_{12} = -\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1}$, $\mathbf{M}_{21} = -\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}$, $\mathbf{M}_{22} = \mathbf{C}^{-1}$.

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung **A** = **L** · **R** einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

A 5

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems an, bei ∞ vielen Lösungen in Parameterform.

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
−8	1	2	5
−7	2	1	4
−3	0	1	0

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
−8	1	2	5
−7	2	1	4
0	1	2	5

(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
−8	1	2	5
−7	2	1	4
−5	1	1	3

Aufgabe 6

Die drei Hilfsabteilungen N_1, N_2, N_3 geben an die beiden Hauptabteilungen H_1, H_2 Leistungen ab, "beliefern" sich aber auch gegenseitig. Die Höhe dieses Leistungstransfers – gemessen in Leistungseinheiten (LE) – sowie die in den Hilfsabteilungen angefallenen primären Kosten liegen in Tabellenform vor:

		Empfänger					
		N_1	N_2	N_3	H_1	H_2	Primärkosten
	N_1	–	4	5	16	10	600
Lieferant	N_2	5	–	5	8	10	800
	N_3	5	4	–	12	14	1400

(a) Bestimmen Sie die Verrechnungspreise p_i in €/LE für jede der Abteilungen N_i.

(b) Verteilen Sie die primären Gesamtkosten auf die Hauptabteilungen H_1, H_2.

Aufgabe 7

A sei eine symmetrische, idempotente 2×2 Matrix mit den Hauptdiagonalelementen $a_{11} = \frac{9}{25}$ und $a_{22} = \frac{16}{25}$.

(a) Welche beiden Bedingungen ergeben sich daraus für die Eigenwerte λ_1 und λ_2 ?

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und den Rang von **A** .

(c) Ermitteln Sie den zum größten Eigenwert gehörenden Eigenvektor, dessen Koeffizienten alle ≥ 0 sind.

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{UWV}' = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2'$ einer 2×2-Matrix **A** ergibt

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix **A** ? (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen - genau eine Lösung - unendlich viele Lösungen - keine Lösung
erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = 25\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$? (Begründung!)

(c) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\cdot\mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems ?
Dabei ist $\mathbf{A}^+ = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2'$ mit $w_i^+ = 1/w_i$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$ sonst.

(d) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$.

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1 , P_2 , P_3 an den Fertigungsstellen F_1 , F_2 , F_3 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefasst:

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	1	1	4	30
F_2	2	1	5	50
F_3	8	5	25	215
DB	13	8	35	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf.

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.	θ
x_2	1	1	4	1	0	0	30	
u_2	1	0	1	–1	1	0	20	
u_3	3	0	5	–5	0	1	65	
z	–5	0	–3	8	0	0	240	

– Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen?

– Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement.

– Welche Variable ist aus der Basis zu eliminieren?

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
x_2	0	1	3	2	–1	0	10
x_1	1	0	1	–1	1	0	20
u_3	0	0	2	–2	–3	1	5
z	0	0	2	3	5	0	340

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1 , x_2 , x_3 ?

– Welcher DB wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der DB, wenn die Ausgangskapazität der Fertigungsstelle 2 um eine Zeiteinheit erhöht wird?