RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

25.5.2007 (SS 2007)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	
Unterschrift	

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

A 1

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $|\,(\lambda\, \mathbf{A'A})^{-1}\,| = \frac{1}{8}$ ist.

Aufgabe 2

In der Mensa werden die Menus M_1, M_2, M_3 angeboten. Die im wesentlichen benötigten Zutaten $Z_1, \ldots, Z_6$ (in kg / Menu), die Einkaufspreise der Zutaten (in € / kg) sowie die Anzahl ausgegebener Menus liegen in Tabellenform vor.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Auszugebende Menus
M_1	0,1	–	0,2	0,2	–	–	2000
M_2	–	0,1	–	0,1	0,2	–	4000
M_3	0,1	–	0,1	–	–	0,2	4000
Preise	2	3	4	5	6	7	

(a) Stellen Sie die Angaben durch eine Matrix und zwei Vektoren dar.
Verwenden Sie *ausschließlich* diese Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Wie hoch sind die Kosten der Zutaten pro Menu für M_1, M_2 bzw. M_3?

(c) Welche Mengen an Zutaten $Z_1, \ldots, Z_6$ werden zur Herstellung aller auszugebenden Menus benötigt?

(d) Wie hoch sind die dabei entstehenden Gesamtkosten für alle Zutaten?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Inverse der partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{B}-\mathbf{I} \end{pmatrix}$.

Hinweis: Die Inverse $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}$ einer partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulärer Untermatrix $\mathbf{A}_{11}$ und regulärer Hilfsmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}$ berechnet sich durch $\mathbf{M}_{11} = \mathbf{A}_{11}^{-1}\,(\,\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,)$, $\mathbf{M}_{12} = -\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1}$, $\mathbf{M}_{21} = -\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}$, $\mathbf{M}_{22} = \mathbf{C}^{-1}$.

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung **A** = **L** · **R** einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie unter Verwendung dieser Zerlegung

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$.

A 5

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems an, bei ∞ vielen Lösungen in Parameterform.

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	0	−1	2
2	1	−3	5
1	1	−2	3

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	0	−1	2
2	1	−3	5
3	1	−4	8

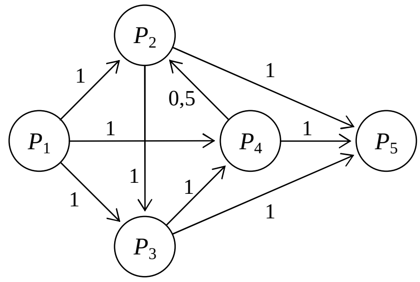
(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	0	−1	2
2	1	−3	5
3	0	−2	6

A 6

Aufgabe 6

Ein Produkt P_5 wird über Zwischenprodukte P_1 ,..., P_4 hergestellt. Der Produktionsprozess ist durch einen Gozintografen dargestellt. Wie viele Mengeneinheiten (ME) P_1 ,..., P_4 werden zur Herstellung *einer* ME P_5 benötigt?



Hinweis: Die Zahl 1 an dem Pfeil von P_2 nach P_5 bedeutet beispielsweise, dass zur Produktion einer ME P_5 *eine* ME P_2 benötigt wird.

A 7

Aufgabe 7

Eine symmetrische 3×3-Matrix $\mathbf{A}$ besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -2$.

(a) Ist $\mathbf{A}$ regulär ? (Begründung !)

(b) Welche Aussage lässt sich über die Definitheit von $\mathbf{A}$ machen ? (Begründung !)

(c) Bestimmen Sie $|\mathbf{A}|$.

(d) Berechnen Sie die Spur von $\mathbf{A}^2$.

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2'$ einer 3×2-Matrix $\mathbf{A}$ ergibt

$$w_1 = 15, \quad w_2 = 0\,, \quad \mathbf{u}_1 = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix $\mathbf{A}$? (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen - genau eine Lösung - unendlich viele Lösungen - keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = 25\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$? (Begründung!)

(c) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\cdot\mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems ?

Dabei ist $\mathbf{A}^+ = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2'$ mit $w_i^+ = 1/w_i$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$ sonst.

(d) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$.

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1, P_2 an den Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3, F_4 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefasst:

	P_1	P_2	Kapazität
F_1	1	0,5	20
F_2	0	1	30
F_3	3	2	70
F_4	2	3	100
DB	25	15	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf!

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_1	1	0,5	1	0	0	0	20	
u_2	0	1	0	1	0	0	30	
u_3	0	0,5	–3	0	1	0	10	
u_4	0	2	–2	0	0	1	60	
z	0	–2,5	25	0	0	0	500	

– Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen?

– Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement.

– Welche Variable ist aus der Basis zu eliminieren?

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_1	1	0	4	0	–1	0	10
u_2	0	0	6	1	–2	0	10
x_2	0	1	–6	0	2	0	20
u_4	0	0	10	0	–4	1	20
z	0	0	10	0	5	0	550

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1, x_2 ?

– Welcher DB wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der DB, wenn die Ausgangskapazität der Fertigungsstelle F_3 um eine Zeiteinheit erhöht wird?