Mathematik für Ökonomen II
SS 1991

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 1

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie Zahlen $a,b,c \in R$ so, daß die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & b & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gilt:

B = **A'A** ist eine Diagonalmatrix.

Lösung zu Aufgabe 1:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1991

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 2

Aufgabe 2:

Ein Unernehmen stellt aus 4 Rohstoffen 3 Zwischenprodukte und daraus zwei Endprodukte (E_1 , E_2) her. Die dazu benötigten Einsatzmengen sind in zwei Tabellen zusammengefaßt:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	0	2
R_2	0	2	1
R_3	2	1	0
R_4	1	1	1

	E_1	E_2
Z_1	1	1
Z_2	0	2
Z_3	2	0

Formulieren und beantworten Sie die folgenden Fragen in Matrix- bzw. Vektorschreibweise:

(a) Welche Rohstoffmengen sind zur Produktion einer Mengeneinheit (ME) der Endprodukte E_1 und E_2 notwendig?

(b) Wie hoch ist der Bedarf an Rohstoffen zur Produktion von 5 ME E_1 und 10 ME E_2?

(c) Wie hoch sind die dabei entstehenden Rohstoffkosten, wenn R_1 und R_4 jeweils 2 DM, R_2 und R_3 jeweils 1 DM pro ME kosten?

Lösung zu Aufgabe 2:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1991

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 3

Aufgabe 3:

Berechnen Sie für $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Matrix

$\mathbf{Y} = \underbrace{\mathbf{X} \cdot \ldots \cdot \mathbf{X}}_{10-fach} = \mathbf{X}^{10}$ (Tip: Partitionieren Sie **X**!)

Lösung zu Aufgabe 3:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1991

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 4

Aufgabe 4:

Die **L**-**R**-Zerlegung **A** = **L** · **R** einer quadratischen Matrix **A** ist

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Berechnen Sie

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des Linearen Gleichungssystems **Ax = b** mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 4:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1991

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 5

Aufgabe 5:

Zur Herstellung einer Mengeneinheit (ME) der Produkte P_1, P_2, P_3 benötigt ein Unternehmen folgende ME der Rohstoffe R_1, R_2, R_3, R_4:

	P_1	P_2	P_3
R_1	1	0	2
R_2	0	2	1
R_3	2	1	0
R_4	1	1	1

Die vorhandenen Rohstoffmengen für R_1, R_2, R_3, R_4 betragen (50, 50, 80, 60) ME.
Wieviele Produkte P_1, P_2, P_3 können damit gefertigt werden?

Lösung zu Aufgabe 5:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1991

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 6

Aufgabe 6:

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen:

(a)
$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & r.S. \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & r.S. \\ \hline 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & r.S. \\ \hline 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Geben Sie jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems an!

Lösung zu Aufgabe 6:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1991

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 7

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, wobei **B** eine reguläre Teilmatrix von **A** ist.

Hinweis:

Für eine Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulären Matrizen $\mathbf{A}_{11}$ und $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$ gilt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\right) & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 7:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1991

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 8

Aufgabe 8:

Die Absätze a_i von 3 Produkten eines Unternehmens in Abhängigkeit ihrer Preise p_i sind

$$a_1 = 6 - 2p_1 + p_2$$
$$a_2 = 12 + p_1 - 4p_2 + p_3$$
$$a_3 = 6 + p_2 - 2p_3$$

Bei welchen Preisen wird der Umsatz maximal?

Lösung zu Aufgabe 8:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1991

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 9

Aufgabe 9:

Die Singulärwertzerlegung einer (4 x 3)-Matrix **A**, **A** = **UWV'** , ergibt für die Diagonalmatrix **W** die Elemente $w_1 = 2$, $w_2 = 1$, $w_3 = 0$.

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix **A**! (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen

- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- keine Lösung

erwarten Sie für ein lineares Gleichungssystem **Ax** = **b** mit obiger Matrix **A**?

(c) Welche Eigenschaft besitzt in diesem Fall der Vektor $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$?
($\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{U}'$; Diagonalmatrix mit den Elementen $\left(\frac{1}{w_1}, \frac{1}{w_2}, 0\right)$).

Lösung zu Aufgabe 9:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1991

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 10

Aufgabe 10:

Eine Matrix **A** besitzt die Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 4 \quad , \qquad \mathbf{x}^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \quad , \qquad \mathbf{x}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 1 \quad , \qquad \mathbf{x}^3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von **A**!

(b) Existiert die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$? (Begründung!)
Wenn ja, berechnen Sie $\mathbf{A}^{-1}$

Lösung zu Aufgabe 10:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1991

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 11

Aufgabe 11:

Ein Unternehmen stellt die beiden Produkte P_1 und P_2 an drei Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

	P_1	P_2	Kapazität
F_1	2	1	8
F_2	1	1	8
F_3	1	1	5
DB	3	2	

Bestimmen Sie mit Hilfe des Simplex-Algorithmus, wieviele Produkte P_1 und P_2 zu fertigen sind, damit der Deckungsbeitrag maximal wird!

Lösung zu Aufgabe 11:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1991

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 12

Aufgabe 12:

Bestimmen Sie die Matrix **A** so, daß für $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix}$, $b \in R$, $b \neq 0$ gilt:

AB = **A**+**B**

Lösung zu Aufgabe 12: