Mathematik für Ökonomen II
SS 1992

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 1

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie eine Zahl $a \in R$, so daß die Matrix

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$$

idempotent wird !

Lösung zu Aufgabe 1:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1992

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 2

Aufgabe 2:

Ein Unternehmen stellt aus 4 Rohstoffen (R_1, R_2, R_3, R_4) 3 Zwischenprodukte (Z_1, Z_2, Z_3) und daraus zwei Endprodukte (E_1, E_2) her. Die in den beiden Produktionsschritten benötigten Einsatzmengen -gemessen in Mengeneinheiten (ME)- sind in zwei Matrizen zusammengefaßt:

$$\mathbf{Z} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}$$

Erforderliche Rohstoffe zur Herstellung je einer ME der Zwischenprodukte Z_1,Z_2,Z_3.

$$\mathbf{E} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E_1 & E_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{array}$$

Erforderliche Zwischenprodukte zur Herstellung je einer ME der Endprodukte E_1,E_2.

Das Produktionssoll für $\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$ beträgt $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} ME$.

Die Rohstoffkosten für $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix}$ belaufen sich auf $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} DM / ME$.

Beantworten Sie die folgenden Fragen *unter ausschließlicher Verwendung* der Matrizen bzw. Vektoren **Z,E,s,k !**Überprüfen Sie dabei stets anhand der Ordnung, ob die von Ihnen durchgeführten Operationen definiert sind!

(a) Welche Kosten $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ entstehen bei der Produktion je einer ME $\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix}$?

(b) Welche Kosten $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ enstehen bei der Produktion je einer ME $\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$?

(c) Wie hoch sind die Gesamtkosten K zur Erfüllung des Produktionssolls?

Lösung zu Aufgabe 2:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1992

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 3

Aufgabe 3:

Die Inverse der Matrix

$$\mathbf{X} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad \mathbf{X}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Matrix **Y** , den Vektor **v** sowie die Zahl λ, aus denen sich die Inverse

$$\mathbf{Z}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{Y} & \mathrm{v} \\ \mathrm{v}' & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{der Matrix} \qquad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{u} \\ \mathrm{u}' & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \qquad \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ zusammensetzt!}$$

Hinweis:

Für eine Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulären Matrizen $\mathbf{A}_{11}$ und $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$ gilt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\right) & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 3:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1992

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 4

Aufgabe 4:

Die **L**-**R**-Zerlegung **A** = **L** · **R** einer quadratischen Matrix **A** ist

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad .$$

Berechnen Sie

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des Linearen Gleichungssystems **Ax = b** mit $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 4:

Teiln.-Nr.	**Punkte**	**Aufgabe 5**

Aufgabe 5:

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen:

(a)

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	0	0	2
0	−2	1	0
0	0	0	0

(b)

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	2	3	1
0	3	4	2
0	0	0	3

(c)

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	2	0	2
0	1	2	5
0	0	1	2

Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an!

Lösung zu Aufgabe 5:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1992

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 6

Aufgabe 6:

Die drei Hilfsabteilungen N_1, N_2, N_3 geben an die beiden Hauptabteilungen H_1, H_2 Leistungen ab, "beliefern" sich aber auch gegenseitig. Die Höhe dieses Leistungstransfers -gemessen in Leistungseinheiten (LE)- wird durch folgende Tabelle abgebildet:

Empfänger

Empfänger

		N_1	N_2	N_3	H_1	H_2
Lieferant	N_1	1	4	5	15	6
	N_2	3	2	5	12	20
	N_3	3	4	3	18	25

In den Hilfsabteilungen N_1, N_2, N_3 fallen primäre Kosten von 240 DM bzw. 320 DM bzw. 400 DM an.

(a) Bestimmen Sie die Verrechnungspreise in DM/LE für jede der Abteilungen N_1, N_2, N_3 !

(b) Verteilen Sie die primären Gesamtkosten auf die Abteilungen H_1 und H_2 !

Lösung zu Aufgabe 6:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1992

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 7

Aufgabe 7:

Die Singulärwertzerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ ergibt

$$A = UWV' = \underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 5\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{W} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{V'}$$

(a) Ist **A** regulär? (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen
- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem **A**x = **b** mit obiger Matrix **A** und $b = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$?

(Begründung !)

(c) Berechnen Sie mit Hilfe obiger Zerlegung eine "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{V}\mathbf{W}^+\mathbf{U}'\mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems!
($W^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{5\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

(d) Welche Eigenschaft besitzt diese "Lösung" ?

Lösung zu Aufgabe 7:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1992

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 8

Aufgabe 8:

Die Matrix der partiellen Ableitungen 2. Ordnung (Hesse-Matrix) einer Funktion f : $R^3 \rightarrow R$ in einem kritischen Punkt $x_0 \in R^3$ sei

$$\mathrm{H}_f(x_0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Liegt in x_0 ein lokales Extremum oder ein Sattelpunkt vor ? (Begründung !)

Lösung zu Aufgabe 8:

Mathematik für Ökonomen II
SS 1992

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 9

Aufgabe 9:

Ein Unternehmen stellt die beiden Produkte P_1 und P_2 an drei Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

	P_1	P_2	*Kapazität*
F_1	1	0	4
F_2	0	1	4
F_3	1	1	6
DB	2	1	

Bei der Berechnung des DB-maximalen Produktionsprogrammes mit Hilfe des Simplex-Algorithmus ergeben sich die nachstehenden Tabellen:

(I)

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	$r.S.$	θ
x_1	1	0	1	0	0	4	
u_2	0	1	0	1	0	4	
u_3	0	1	–1	0	1	2	
z	0	–1	2	0	0	8	

(II)

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	$r.S.$	θ
x_1	1	0	1	0	0	4	
u_2	0	0	1	1	–1	2	
x_2	0	1	–1	0	1	2	
z	0	0	1	0	1	10	

(III)

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	$r.S.$	θ
u_1	1	0	1	0	0	4	
u_2	0	1	0	1	0	4	
u_3	1	1	0	0	1	6	
z	–2	–1	0	0	0	0	

(a) Geben Sie jeweils an. ob es sich um das Anfangstableau, das Endtableau oder ein Zwischentableau handelt!

(b) Interpretieren Sie das Endtableau:
- Wie lauten die optimalen Produktionsmengen?
- Welcher DB wird dabei erzielt?
- An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wieviel freie Kapazität?

(c) Ermitteln Sie beim Zwischentableau das nächste Pivotelement:
Welche Variable sollte aus der Basis eliminiert werden, welche Variable neu in die Basis aufgenommen werden?
(Pivotelement im entsprechenden Tableau markieren!)

Lösung zu Aufgabe 9: