RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR Mathematik für Ökonomen II

22.07.1993 (SS 93)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Die endgültige Lösung muß auf das jeweilige Aufgabenblatt oder die betreffende Rückseite geschrieben werden.

Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 1

Aufgabe 1:

Sei $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ so, daß $\mathbf{A} = \mathbf{ab}'$ idempotent wird!

Lösung zu Aufgabe 1:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 2

Aufgabe 2:

In der Mensa werden an einem Tag 3 verschiedene Menus M_1 , M_2 , M_3 angeboten.
Sie enthalten im wesentlichen die Zutaten Z_1 , ... , Z_6 (in kg/Menu):

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6
M_1	0,2	-	-	0,1	-	0,1
M_2	-	0,1	-	-	0,2	0,1
M_3	-	-	0,1	0,1	0,2	-
Kosten in DM/kg	1,-	2,-	2,-	8,-	4,-	3,-

Die Anzahl ausgegebener Menus beträgt 4000 für M_1 , 2000 für M_2 und 4000 für M_3 .

(a) Stellen Sie alle Angaben (einschließlich der Tabelle) durch geeignet definierte Matrizen bzw. Vektoren dar.
Verwenden Sie diese Matrizen und Vektoren zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Wie hoch sind die Kosten der Zutaten pro Menu für M_1 , M_2 bzw. M_3?

(c) Welche Mengen an Zutaten Z_1 , ... , Z_6 werden insgesamt zur Herstellung aller ausgegebenen Menus benötigt?

(d) Wie hoch sind die dabei entstehenden Gesamtkosten für alle Zutaten?

Lösung zu Aufgabe 2:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 3

Aufgabe 3:

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ sei eine partitionierte Matrix der Ordnung 6x6 mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$ und

0-Matrizen der Ordnung 2x2. **I** sei die Einheitsmatrix der Ordnung 6x6.

Bestimmen Sie $(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{10}$.

Lösung zu Aufgabe 3:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 4

Aufgabe 4:

Für eine quadratische Matrix **A** gilt die Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}'$ mit

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad .$$

Berechnen Sie

(a) die Inverse $\mathbf{L}^{-1}$ von **L**,

(b) die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ von **A**.

Lösung zu Aufgabe 4:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 5

Aufgabe 5:

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen:

(a)

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	0	0	1
0	1	0	2
0	2	1	3
0	3	2	4

(b)

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	0	0	1
0	1	0	2
0	0	1	3
0	0	2	4

(c)

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	0	0	1
0	1	1	2
0	2	2	4
0	3	3	6

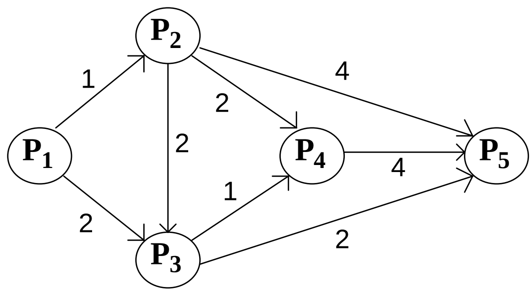
Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an!

Lösung zu Aufgabe 5:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 6

Aufgabe 6:

Ein Produkt P_5 wird über Zwischenprodukte P_1, ..., P_4 hergestellt. Der Produktionsprozeß ist durch folgenden Gozintographen dargestellt:



Wieviel Mengeneinheiten (ME) P_1, ..., P_4 werden zur Herstellung einer ME P_5 benötigt?

Hinweis: Die Zahl 2 an dem Pfeil von P_1 nach P_3 bedeutet beispielsweise, daß zur Produktion einer ME P_3 *zwei* ME P_1 benötigt werden.

Lösung zu Aufgabe 6:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 7

Aufgabe 7:

Die Singulärwertzerlegung einer 3x3-Matrix **A** ergibt

$$\mathbf{A} = \mathbf{UWV'} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2' + w_3\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3' \text{ mit}$$

$$w_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}},\ w_2 = \tfrac{1}{3},\ w_3 = \tfrac{1}{3\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix},\ \mathbf{u}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix **A**? (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen

- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit obiger Matrix **A** und

$$\mathbf{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \ ? \qquad \text{(Begründung !)}$$

(c) Berechnen Sie mit Hilfe obiger Zerlegung die Matrix

$\mathbf{A}^+ = \mathbf{VW}^+\mathbf{U}' = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2' + w_3^+\mathbf{v}_3\mathbf{u}_3'$ sowie den Vektor $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$.

($w_i^+ = \dfrac{1}{w_i}$, falls $w_i \neq 0$; $w_i^+ = 0$, falls $w_i = 0$)

(d) Welche Eigenschaften besitzen $\mathbf{A}^+$ bzw. $\mathbf{x}^+$?

Lösung zu Aufgabe 7:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 8

Aufgabe 8:

A sei eine symmetrische, idempotente 3x3-Matrix mit den Hauptdiagonalelementen
$a_{11} = a_{22} = \frac{4}{9} \quad , a_{33} = \frac{1}{9}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von **A** !

(b) Ermitteln Sie den zum größten Eigenwert gehörenden Eigenvektor, dessen Koeffizienten alle ≥ 0 sind!

Lösung zu Aufgabe 8:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 9

Aufgabe 9:

Ein Unternehmen stellt die drei Produkte P_1 , P_2 , P_3 an drei Fertigungsstellen F_1 , F_2 , F_3 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	5	25	8	215
F_2	1	4	1	30
F_3	1	5	2	50
DB	8	35	13	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf!

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	$r.S.$
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	$r.S.$	θ
u_1	0	5	3	1	–5	0	65	
x_1	1	4	1	0	1	0	30	
u_3	0	1	1	0	–1	1	20	
z	0	–3	–5	0	8	0	240	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?

(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	$r.S.$	θ
u_1	0	2	0	1	–2	–3	5	
x_1	1	3	0	0	2	–1	10	
x_3	0	1	1	0	–1	1	20	
z	0	2	0	0	3	5	340	

- Wie lauten die optimalen Produktionsmengen?
- Welcher DB wird dabei erzielt?
- An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wieviel freie Kapazität?

Lösung zu Aufgabe 9: