RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

04.06.1994 (SS 94)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Die endgültige Lösung muß auf das jeweilige Aufgabenblatt oder die betreffende Rückseite geschrieben werden.

Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 1

Aufgabe 1:

Berechnen Sie für die Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Potenzen $\mathbf{M}^2$, $\mathbf{M}^3$ und $\mathbf{M}^4$.

(Tip: Partitionieren Sie $\mathbf{M}$!)

Lösung zu Aufgabe 1:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 2

Aufgabe 2:

Ein Unternehmen stellt aus fünf Rohstoffen (R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , R_5) vier Zwischenprodukte (Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_4) her. Aus diesen vier Zwischenprodukten werden die vier Vorprodukte (V_1 , V_2 , V_3 , V_4) erzeugt und daraus die drei Endprodukte (E_1 , E_2 , E_3).
Die zur Herstellung benötigten Mengen sind in drei Tabellen zusammengefaßt:

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
R_1	0	1	0	1
R_2	1	0	0	1
R_3	1	0	1	0
R_4	0	1	1	0
R_5	0	1	0	1

	V_1	V_2	V_3	V_4
Z_1	3	1	1	2
Z_2	4	1	0	1
Z_3	0	0	1	1
Z_4	1	0	0	0

	E_1	E_2	E_3
V_1	1	1	1
V_2	1	1	2
V_3	1	2	0
V_4	1	0	0

Das Produktionssoll beträgt 10 ME für E_1 , 20 ME für E_2 und 30 ME für E_3.

(a) Stellen Sie die obigen Angaben durch geeignet definierte Matrizen bzw. Vektoren dar !

Verwenden Sie diese Matrizen bzw. Vektoren um folgende Fragen zu beantworten:

(b) Bestimmen Sie die Matrix des Rohstoffverbrauchs für die Vorprodukte V_1 , ... , V_4 !
(c) Ermitteln Sie die Matrix des Rohstoffverbrauchs für die Endprodukte E_1 , E_2 , E_3 !
(d) Wie hoch ist der Rohstoffbedarf zur Herstellung des Produktionssolls ?

Lösung zu Aufgabe 2:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 3

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}$, wobei **B** eine reguläre Matrix ist und $\mathbf{B}^{-1}$ deren Inverse.

Hinweis:

Für eine Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulären Matrizen $\mathbf{A}_{11}$ und $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$ gilt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\right) & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 3:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 4

Aufgabe 4:

Für eine quadratische Matrix **A** gilt die Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}'$ mit

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Berechnen Sie

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems **Ax = b** mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Lösung zu Aufgabe 4:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 5

Aufgabe 5:

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen.
Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an!

(a)

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	1	1	6
0	2	2	8
0	0	3	6

(b)

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	1	1	1
0	2	2	8
0	3	3	11

(c)

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	1	1	1
0	1	1	1
0	2	2	2

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 6

Aufgabe 6:

Die drei Hilfsabteilungen N_1 , N_2 , N_3 geben an die beiden Hauptabteilungen H_1 , H_2 Leistungen ab, "beliefern" sich aber auch gegenseitig. Die Höhe dieses Leistungstransfers - gemessen in Leistungseinheiten (LE) - wird durch folgende Tabelle abgebildet:

		Empfänger				
		N_1	N_2	N_3	H_1	H_2
Lieferant	N_1	3	3	4	5	8
	N_2	2	4	4	10	14
	N_3	2	3	2	15	20

In den Hilfsabteilungen N_1 , N_2 , N_3 fallen primäre Kosten von 130 DM bzw. 360 DM bzw. 700 DM an.

(a) Bestimmen Sie die Verrechnungspreise in DM/LE für jede der Abteilungen N_1 , N_2 , N_3 !

(b) Verteilen Sie die primären Gesamtkosten auf die Abteilungen H_1 und H_2 !

Lösung zu Aufgabe 6:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 7

Aufgabe 7:

Die Singulärwertzerlegung der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 11 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$ ergibt $\mathbf{A} = \mathbf{UWV'} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2'$ mit

$$w_1 = 15,\ w_2 = 5 \cdot \sqrt{2},\ \mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix **A**? (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen
- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit obiger Matrix **A** und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(Begründung !)

(c) Berechnen Sie mit Hilfe obiger Zerlegung eine "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems!
($\mathbf{A}^+ = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2'$; $w_i^+ = \dfrac{1}{w_i}$, falls $w_i \neq 0$; $w_i^+ = 0$, falls $w_i = 0$)

(d) Welche Eigenschaft besitzt diese "Lösung" ?

Lösung zu Aufgabe 7:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 8

Aufgabe 8:

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$!

(b) Ist die Matrix **A** positiv semidefinit ? (Begründung !)

(c) Ist A regulär ? (Begründung !)

(d) Berechnen Sie die Determinante der Matrix **A** !

Lösung zu Aufgabe 8:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 9

Aufgabe 9:

Ein Unternehmen stellt die beiden Produkte P_1, P_2 an vier Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3, F_4 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

	P_1	P_2	Kapazität
F_1	1	0,5	20
F_2	0	1	30
F_3	3	2	70
F_4	2	3	100
DB	25	15	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf!

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	$r.S.$
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	$r.S.$	θ
x_1	1	0,5	1	0	0	0	20	
u_2	0	1	0	1	0	0	30	
u_3	0	0,5	–3	0	1	0	10	
u_4	0	2	–2	0	0	1	60	
z	0	–2,5	25	0	0	0	500	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?

(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	$r.S.$
x_1	1	0	4	0	–1	0	10
u_2	0	0	6	1	–2	0	10
x_2	0	1	–6	0	2	0	20
u_4	0	0	10	0	–4	1	20
z	0	0	10	0	5	0	550

- Wie lauten die optimalen Produktionsmengen?
- Welcher DB wird dabei erzielt?
- An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wieviel freie Kapazität?

Lösung zu Aufgabe 9: