RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

02.06.1995 (SS 95)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Die endgültige Lösung muß auf das jeweilige Aufgabenblatt oder die betreffende Rückseite geschrieben werden.

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Punkte	Aufgabe 1

Aufgabe 1

Für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ so zu bestimmen, daß $|\,(\lambda \mathbf{A})^{-1}\,| = 8$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 1:

Punkte	Aufgabe 2

Aufgabe 2

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1 und P_2 auf vier Maschinen M_1, M_2, M_3, M_4 her.

Die dazu benötigten Zeiten (in Stunden / Stück) sind in folgender Tabelle dargestellt:

	M_1	M_2	M_3	M_4
P_1	1	-	2	1
P_2	-	1	-	2

Das Produktionssoll beträgt 200 Stück für P_1 und 100 Stück für P_2.

Die Kosten pro Maschinenstunde belaufen sich auf 70 DM für M_1, 100 DM für M_2, 90 DM für M_3 und 150 DM für M_4.

(a) Stellen Sie die obigen Angaben durch geeignet definierte Matrizen bzw. Vektoren dar!

Verwenden Sie diese Matrizen bzw. Vektoren um folgende Fragen zu beantworten:

(b) Welche Maschinenkosten verursacht die Produktion von je einem Stück P_1 bzw. P_2 ?

(c) Wie lange wird jede der vier Maschinen zur Herstellung des Produktionssolls insgesamt eingesetzt?

(d) Welche Maschinenkosten enstehen dabei insgesamt?

Lösung zu Aufgabe 2:

Punkte	Aufgabe 3

Aufgabe 3

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ sei eine partitionierte Matrix der Ordnung 6×6 mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ und **0**- bzw Einheitsmatrizen der Ordnung 2×2. Bestimmen Sie $\mathbf{M}^4$ und $\mathbf{M}^5$!

Lösung zu Aufgabe 3:

Punkte	Aufgabe 4

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung **A** = **L** · **R** einer quadratischen Matrix **A** ergibt

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems **Ax = b** mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix}$.

Lösung zu Aufgabe 4:

Punkte	Aufgabe 5

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an!

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	0	1	4
0	1	0	2
1	1	1	7

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	0	1	4
0	1	0	2
0	0	1	3
1	1	1	6

(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	0	1	4
0	1	0	2
1	1	1	6

Punkte	Aufgabe 6

Aufgabe 6

Die drei Hilfsabteilungen N_1 , N_2 , N_3 geben an die beiden Hauptabteilungen H_1 , H_2 Leistungen ab, "beliefern" sich aber auch gegenseitig. Die Höhe dieses Leistungstransfers - gemessen in Leistungseinheiten (LE) - wird durch folgende Tabelle abgebildet:

		Empfänger				
		N_1	N_2	N_3	H_1	H_2
Lieferant	N_1	2	5	6	4	5
	N_2	4	3	6	6	9
	N_3	4	5	4	10	11

In den Hilfsabteilungen N_1 , N_2 , N_3 fallen primäre Kosten von 240 DM bzw. 300 DM bzw. 360 DM an.

(a) Bestimmen Sie die Verrechnungspreise in DM/LE für jede der Abteilungen N_1 , N_2 , N_3 !

(b) Verteilen Sie die primären Gesamtkosten auf die Abteilungen H_1 und H_2 !

Lösung zu Aufgabe 6:

Punkte	Aufgabe 7

Aufgabe 7

Die Singulärwertzerlegung der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ ergibt $\mathbf{A} = \mathbf{UWV'} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2'$ mit

$w_1 = 15$, $w_2 = 0$, $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix $\mathbf{A}$? (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen

- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit obiger Matrix $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 25 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}$? (Begründung !)

(c) Berechnen Sie mit Hilfe obiger Zerlegung eine "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems!

($\mathbf{A}^+ = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2'$; $w_i^+ = \frac{1}{w_i}$, falls $w_i \neq 0$; $w_i^+ = 0$, falls $w_i = 0$)

(d) Welche Eigenschaft besitzt diese "Lösung" ?

Lösung zu Aufgabe 7:

Punkte	Aufgabe 8

Aufgabe 8

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$!

(b) Ist $\mathbf{A}$ regulär ? (Begründung !)

(c) Welche Aussage läßt sich über die Definitheit von $\mathbf{A}$ machen ? (Begründung !)

(d) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\mathbf{A}$!

Lösung zu Aufgabe 8:

Punkte	Aufgabe 9

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die beiden Produkte P_1 , P_2 an vier Fertigungsstellen F_1 , F_2 , F_3 , F_4 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

	P_1	P_2	Kapazität
F_1	1	0,5	40
F_2	2	2	150
F_3	3	2	150
F_4	2	3	240
DB	20	12	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf!

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_1	1	0,5	1	0	0	0	40	
u_2	0	1	-2	1	0	0	70	
u_3	0	0,5	-3	0	1	0	30	
u_4	0	2	-2	0	0	1	160	
z	0	-2	20	0	0	0	800	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?

(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_1	1	0	4	0	-1	0	10
u_2	0	0	4	1	-2	0	10
x_2	0	1	-6	0	2	0	60
u_4	0	0	10	0	-4	1	40
z	0	0	8	0	4	0	920

- Wie lauten die optimalen Produktionsmengen?
- Welcher DB wird dabei erzielt?
- An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wieviel freie Kapazität?