RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM
Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen
Lineare Algebra
24.5.1996 (SS 96)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Die endgültige Lösung muß auf das jeweilige Aufgabenblatt oder die betreffende Rückseite geschrieben werden.

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Punkte 1

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Zahl $a > 0$ so, daß gilt: Spur ($\mathbf{A}\mathbf{b}\mathbf{b}'\mathbf{A}'$) = 11.

Lösung:

Punkte 2

Aufgabe 2

In der Mensa werden an einem Tag 3 verschiedene Menus M_1, M_2, M_3 angeboten. Die im wesentlichen benötigten Zutaten $Z_1, \dots, Z_6$ (in kg/Menu), die Kosten der Zutaten (in DM/kg) sowie die Anzahl auszugebender Menus liegen in Tabellenform vor:

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Auszugebende Menus
M_1	0,1	–	0,2	0,2	–	–	2000
M_2	–	0,1	–	0,1	0,2	–	4000
M_3	0,1	–	0,1	–	–	0,2	4000
Kosten	2	3	4	5	6	7	

(a) Stellen Sie alle Angaben durch geeignet definierte Matrizen bzw. Vektoren dar.
Verwenden Sie diese Matrizen und Vektoren zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Wie hoch sind die Kosten der Zutaten pro Menu für M_1, M_2 bzw. M_3?

(c) Welche Mengen an Zutaten $Z_1, \dots, Z_6$ werden insgesamt zur Herstellung aller auszugebender Menus benötigt?

(d) Wie hoch sind die dabei entstehenden Gesamtkosten für alle Zutaten?

Lösung:

Punkte 3

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Inverse der partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{B}-\mathbf{I} \end{pmatrix}$!

Hinweis: Für eine partitionierte Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulärer Untermatrix $\mathbf{A}_{11}$ und regulärer Hilfsmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}$ berechnet sich die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ durch $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}) & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}$.

Lösung:

Punkte 4

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung **A** = **L** · **R** einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie (a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$!

Lösung:

Punkte 5

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an!

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	0	2	7
0	1	3	11
2	1	7	26

Lösung zu (a)

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	0	2	7
0	1	3	11
2	2	10	36

Lösung zu (b)

(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	0	2	7
0	1	3	11
2	1	0	4

Lösung zu (c)

Punkte 6

Aufgabe 6

Die Produkte P_1 , P_2 , P_3 eines Unternehmens werden in den Ländern L_1 , L_2 , L_3 verkauft. Die geplanten Verkaufsmengen für jedes Produkt und Land sowie die geplanten Umsätze in den drei Ländern liegen in Tabellenform vor:

	P_1	P_2	P_3	Geplanter Umsatz
L_1	1	1	1	60
L_2	2	1	3	120
L_3	3	2	1	120

Wie hoch müssen die Preise p_1 , p_2 , p_3 für die drei Produkte gewählt werden, damit die Umsatzziele in den einzelnen Ländern erreicht werden?

Lösung:

Punkte 7

Aufgabe 7

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{UWV}'$ einer 4×2-Matrix $\mathbf{A}$ ergibt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 14 \\ 14 & 2 \\ -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix $\mathbf{A}$? (Begründung!)

(b) Welche Eigenschaft folgt hieraus für die Matrix $\mathbf{A}^+$?[1]

(c) Bestimmen Sie den Rang von $(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$, also den Rang der um $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 225 \end{pmatrix}$ erweiterten Matrix $\mathbf{A}$!

Welche der Lösungsmengen
- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- keine Lösung

erhält man daher für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$? (Begründung!)

(d) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems?

(e) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$!

Lösung:

[1] $\mathbf{A}^+ = \mathbf{VW}^+\mathbf{U}' = w_1^+\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{u}_1' + \ldots + w_n^+\,\mathbf{v}_n\,\mathbf{u}_n'$ mit $w_i^+ = \frac{1}{w_i}$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$, falls $w_i = 0$.

Punkte 8

Aufgabe 8

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$!

(b) Berechnen Sie $|\,\mathbf{A}\,|$!

(c) Ist A regulär ? (Begründung !)

(d) Welche Aussage läßt sich über die Definitheit von **A** machen ? (Begründung !)

Lösung:

Punkte 9

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die drei Produkte P_1 , P_2 , P_3 an vier Fertigungsstellen F_1 , F_2 , F_3 , F_4 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (*DB*) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefaßt:

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	–	1	1	50
F_2	1	1	–	30
F_3	1	–	1	40
F_4	1	1	1	65
DB	20	15	10	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des *DB* auf!

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z								

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
u_1	0	2	0	1	1	–1	0	40	
x_1	1	1	0	0	1	0	0	30	
x_3	0	–1	1	0	–1	1	0	10	
u_4	0	1	0	0	0	–1	1	25	
z	0	–5	0	0	10	10	0	700	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?
(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_2	0	1	0	0,5	0,5	–0,5	0	20
x_1	1	0	0	–0,5	0,5	0,5	0	10
x_3	0	0	1	0,5	–0,5	0,5	0	30
u_4	0	0	0	–0,5	–0,5	–0,5	1	5
z	0	0	0	2,5	12,5	7,5	0	800

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen?

– Welcher *DB* wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wieviel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der *DB*, wenn die Kapazität der Fertigungsstelle 1 um eine Einheit erhöht wird?