RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

15.5.1997 (SS 97)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Die endgültige Lösung muß auf das jeweilige Aufgabenblatt oder die betreffende Rückseite geschrieben werden.

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Punkte 1

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, daß $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|$ und $\mathbf{A}$ positiv definit ist.

Lösung:

Punkte 2

Aufgabe 2

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1, P_2, P_3 auf den Maschinen M_1, M_2, M_3 her. Die dazu benötigten Zeiten (in Minuten / Stück), das Produktionssoll sowie die Kosten pro Maschinenstunde liegen in Tabellenform vor:

	M_1	M_2	M_3	Produktionssoll
P_1	30	25	22	30
P_2	20	15	36	20
P_3	20	45	12	10
Maschinenkosten	60	80	100	

(a) Stellen Sie alle Angaben durch geeignet definierte Matrizen bzw. Vektoren dar.
Verwenden Sie *ausschließlich* diese Matrizen bzw. Vektoren zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Welche Maschinenkosten verursacht die Fertigung je eines Stückes der Produkte P_1, P_2, P_3 ?

(c) Wie lange wird jede der drei Maschinen M_1, M_2, M_3 zur Herstellung des Produktionssolls insgesamt eingesetzt?

(d) Welchen Maschinenkosten entstehen dabei insgesamt?

Lösung:

Punkte 3

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Inverse der partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}$ regulär !

Hinweis: Für eine partitionierte Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulärer Untermatrix $\mathbf{A}_{11}$ und regulärer Hilfsmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}$ berechnet sich die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ durch $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}) & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}$.

Lösung:

Punkte 4

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$ einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie (a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$!

Lösung:

Punkte 5

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an!

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	1	2	8
1	3	0	8
2	3	–1	8

Lösung zu (a)

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	1	2	8
1	3	0	8
1	–3	6	9

Lösung zu (b)

(c)

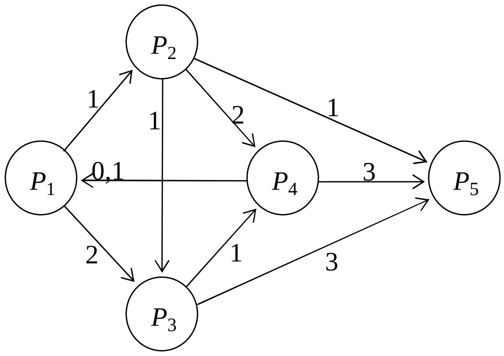
x_1	x_2	x_3	r.S.
1	1	2	8
1	3	0	8
1	2	1	8

Lösung zu (c)

Punkte 6

Aufgabe 6

Das Produkt P_5 wird über Zwischenprodukte P_1, P_2, P_3, P_4 gefertigt. Der Produktionsprozeß ist durch einen Gozintographen dargestellt. Wieviel Mengeneinheiten (ME) P_1, P_2, P_3, P_4 werden zur Herstellung *einer* ME P_5 benötigt?



Hinweis: Die Zahl 3 an dem Pfeil von P_4 nach P_5 bedeutet beispielsweise, daß zur Produktion *einer* ME P_5 *drei* ME P_4 benötigt werden.

Lösung:

Punkte 7

Aufgabe 7

Eine symmetrische 3×3-Matrix **A** besitzt die Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{9}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{18}, \qquad \mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche Aussage läßt sich über die Definitheit von **A** machen ? (Begründung !)

(b) Berechnen Sie die Spur von **A**!

(c) Ist **A** regulär ? (Begründung !) Wenn ja, bestimmen Sie die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$!

(d) Berechnen Sie $|\frac{1}{3}\mathbf{A}^{-1}|$!

Lösung:

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2'$ einer 3×2-Matrix **A** ergibt

$$w_1 = 15, \quad w_2 = 0, \quad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix **A**? (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen
- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- keine Lösung

erhält man daher für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = 25\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$? (Begründung!)

(c) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\cdot\mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems?
Dabei ist $\mathbf{A}^+ = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2'$ mit $w_i^+ = \frac{1}{w_i}$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$, falls $w_i = 0$.

(d) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$!

Lösung:

Punkte 9

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1 , P_2 an den Fertigungsstellen F_1 , F_2 , F_3 , F_4 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (*DB*) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefaßt:

	P_1	P_2	Kapazität
F_1	1	0,5	20
F_2	8	5	200
F_3	3	2	75
F_4	4	4	160
DB	70	40	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des *DB* auf!

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_1	1	0,5	1	0	0	0	20	
u_2	0	1	–8	1	0	0	40	
u_3	0	0,5	–3	0	1	0	15	
u_4	0	2	–4	0	0	1	80	
z	0	–5	70	0	0	0	1400	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?
(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_1	1	0	4	0	–1	0	5
u_2	0	0	–2	1	–2	0	10
x_2	0	1	–6	0	2	0	30
u_4	0	0	8	0	–4	1	20
z	0	0	40	0	10	0	1550

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1, x_2 ?

– Welcher *DB* wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wieviel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der *DB*, wenn die Kapazität der Fertigungsstelle 3 um eine Einheit erhöht wird?