RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

15.5.1998 (SS 1998)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Die endgültige Lösung muß auf das jeweilige Aufgabenblatt oder die betreffende Rückseite geschrieben werden.

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, daß Spur($\mathbf{A}' \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{A}$) = | $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{A}$ | ist.

Lösung:

Aufgabe 2

Ein landwirtschaftlicher Betrieb baut die Fruchtarten F_1 , F_2 , F_3 an. Dabei setzt er die Maschinen M_1 , M_2 , M_3 ein. Die benötigten Zeiten (in Stunden / Hektar) sowie die Anbaufläche (in Hektar) liegen in Tabellenform vor:

	M_1	M_2	M_3	Anbaufläche
F_1	2	1	6	1
F_2	0	5	4	2
F_3	6	3	2	3

Die Maschinenkosten für M_1 , M_2 , M_3 betragen 60 , 80 bzw. 100 DM / Stunde.

(a) Stellen Sie die obigen Angaben durch geeignet definierte Matrizen bzw. Vektoren dar!
Verwenden Sie diese Matrizen bzw. Vektoren zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Wie hoch sind die Kosten je Hektar Anbaufläche für die einzelnen Fruchtarten?

(c) Wie lange wird jede der Maschinen M_j insgesamt eingesetzt?

(d) Wie hoch sind die dabei entstehenden Gesamtkosten?

Lösung:

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Inverse der partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ 2\mathbf{I} & 3\mathbf{I} \end{pmatrix}$!

Hinweis: Für eine partitionierte Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulärer Untermatrix $\mathbf{A}_{11}$ und regulärer Hilfsmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}$ berechnet sich die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ durch $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}) & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}$.

Lösung:

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung **A** = **L** · **R** einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$!

Lösung:

Aufgabe 5

A 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an!

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	4
1	3	5	6
0	1	2	3

Lösung zu (a)

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	4
1	3	5	6
0	1	2	2

Lösung zu (b)

(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	4
1	3	5	6
1	0	1	2

Lösung zu (c)

Aufgabe 6

Die Produkte P_1 , P_2 , P_3 eines Unternehmens werden in den Ländern L_1 , L_2 , L_3 , L_4 verkauft. Die geplanten Verkaufsmengen für jedes Produkt und Land sowie die geplanten Umsätze in den vier Ländern liegen in Tabellenform vor:

	P_1	P_2	P_3	Geplanter Umsatz
L_1	1	1	1	60
L_2	2	3	4	200
L_3	3	5	3	220
L_4	4	6	4	280

Wie hoch müssen die Preise p_1 , p_2 , p_3 für die drei Produkte gewählt werden, damit die Umsatzziele in den einzelnen Ländern erreicht werden?

Lösung:

Aufgabe 7

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$!

(b) Berechnen Sie $|\mathbf{A}|$!

(c) Ist A regulär ? (Begründung !)

(d) Welche Aussage läßt sich über die Definitheit von **A** machen ? (Begründung !)

Lösung:

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{UWV'} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2'$ einer 2×2-Matrix $\mathbf{A}$ ergibt

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{20}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix $\mathbf{A}$? (Begründung!)

(b) Welche Eigenschaft besitzt in diesem Fall die Matrix
$\mathbf{A}^+ = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2'$ mit $w_i^+ = \frac{1}{w_i}$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$, falls $w_i = 0$?

(c) Welche der Lösungsmengen
- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- keine Lösung

erhält man daher für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$? (Begründung!)

(d) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems?

(e) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$!

Lösung:

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1, P_2, P_3 an den Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3, F_4 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (*DB*) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefaßt:

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	1	0	2	20
F_2	0	2	1	30
F_3	2	1	0	40
F_4	1	1	1	29
DB	10	5	5	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des *DB* auf!

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z								

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_1	1	0	2	1	0	0	0	20	
u_2	0	0	9	4	1	–2	0	30	
x_2	0	1	–4	–2	0	1	0	0	
u_4	0	0	3	1	0	–1	1	9	
z	0	0	–5	0	0	5	0	200	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?
(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_1	1	0	0	1/3	0	2/3	–2/3	14
u_2	0	0	0	1	1	1	–3	3
x_2	0	1	0	–2/3	0	–1/3	4/3	12
x_3	0	0	1	1/3	0	–1/3	1/3	3
z	0	0	0	5/3	0	10/3	5/3	215

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1, x_2, x_3 ?

– Welcher *DB* wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wieviel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der *DB*, wenn die Kapazität der Fertigungsstelle 3 um eine Einheit erhöht wird?