RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

21.5.1999 (SS 1999)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Bestimmen Sie eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, daß für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ gilt: $|(\mathbf{A}'\,\mathbf{B}\,\mathbf{A})^{-1}| = \mathrm{Spur}(\frac{1}{a}\mathbf{B})$.

Lösung:

Aufgabe 2

Ein Unternehmen stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 her. Aus diesen Zwischenprodukten werden die Vorprodukte V_1, V_2, V_3, V_4 erzeugt und daraus die Endprodukte E_1, E_2, E_3.
Die zur Herstellung benötigten Mengen sind in drei Tabellen zusammengefaßt:

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
R_1	1	0	1	0
R_2	0	1	1	1
R_3	1	0	0	1
R_4	0	1	1	1
R_5	1	0	1	0

	V_1	V_2	V_3	V_4
Z_1	1	2	3	3
Z_2	0	1	2	1
Z_3	1	1	1	2
Z_4	1	1	1	2

	E_1	E_2	E_3
V_1	1	3	0
V_2	1	0	2
V_3	0	1	1
V_4	1	0	0

Das Produktionssoll beträgt 10 ME für E_1 , 20 ME für E_2 und 20 ME für E_3.

(a) Stellen Sie die obigen Angaben durch drei Matrizen und einen Vektor dar.
Verwenden Sie ausschließlich diese Matrizen bzw. diesen Vektor zur Lösung der Teilaufgaben (b),(c),(d).

(b) Bestimmen Sie die Matrix des Rohstoffverbrauchs für die Vorprodukte V_1 , ... , V_4 .

(c) Ermitteln Sie die Matrix des Rohstoffverbrauchs für die Endprodukte E_1 , E_2 , E_3 .

(d) Wie hoch ist der Rohstoffbedarf zur Herstellung des Produktionssolls ?

Lösung:

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Inverse der partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}-\mathbf{I} & \mathbf{B}^2 \end{pmatrix}$!

Hinweis: Für eine partitionierte Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulärer Untermatrix $\mathbf{A}_{11}$ und regulärer Hilfsmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$ berechnet sich die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ durch $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}) & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}$.

Lösung:

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung **A** = **L** · **R** einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$!

Lösung:

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an!

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
0	1	1	2
1	0	2	3
1	2	4	8

Lösung zu (a)

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
0	1	1	2
1	0	2	3
1	1	3	5

Lösung zu (b)

(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
0	1	1	2
1	0	2	3
2	1	1	4

Lösung zu (c)

Aufgabe 6

Die drei Hilfsabteilungen N_1 , N_2 , N_3 geben an die beiden Hauptabteilungen H_1 , H_2 Leistungen ab, "beliefern" sich aber auch gegenseitig. Die Höhe dieses Leistungstransfers - gemessen in Leistungseinheiten (LE) - wird durch folgende Tabelle abgebildet:

		Empfänger					
		N_1	N_2	N_3	H_1	H_2	Primärkosten
Lieferant	N_1	2	0	10	7	3	250
	N_2	5	3	10	4	6	350
	N_3	0	10	4	1	9	300

(a) Bestimmen Sie die Verrechnungspreise p_i in DM/LE für jede der Abteilungen N_i .

(b) Verteilen Sie die primären Gesamtkosten auf die Hauptabteilungen H_1 , H_2 .

Lösung:

Aufgabe 7

Eine 2×2 Matrix **A** besitzt die Darstellung $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}'$, wobei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor ist mit $|\mathbf{v}| = 1$.

(a) Berechnen Sie die Spur(**A**).

(b) Bestimmen Sie $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$.

(c) Welche Bedingungen ergeben sich aus (a) und (b) für die Eigenwerte λ_1 , λ_2 von **A** ? Geben Sie λ_1 , λ_2 an.

(d) Ist **A** regulär ? (Begründung!)

Lösung:

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2'$ einer 4×2-Matrix $\mathbf{A}$ ergibt

$$w_1 = 25, \quad w_2 = 0, \quad \mathbf{u}_1 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\2\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}.$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix $\mathbf{A}$? (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen
- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = 25\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\4\\5\end{pmatrix}$? (Begründung!)

(c) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\cdot\mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems?
Dabei ist $\mathbf{A}^+ = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2'$ mit $w_i^+ = \frac{1}{w_i}$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$, falls $w_i = 0$.

(d) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$!

Lösung:

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1, P_2, P_3 an den Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (*DB*) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefaßt:

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	1	1	3	60
F_2	2	0	2	40
F_3	0	1	1	30
DB	15	10	5	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des *DB* auf!

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.	θ
u_1	0	1	2	1	–0,5	0	40	
x_1	1	0	1	0	0,5	0	20	
u_3	0	1	1	0	0	1	30	
z	0	–10	10	0	7,5	0	300	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?
(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
u_1	0	0	1	1	–0,5	–1	10
x_1	1	0	1	0	0,5	0	20
x_2	0	1	1	0	0	1	30
z	0	0	20	0	7,5	10	600

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1, x_2, x_3 ?

– Welcher *DB* wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wieviel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der *DB*, wenn die Kapazität der Fertigungsstelle 2 um eine Einheit erhöht wird?