RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

9.12.2000 (WS 2000/01)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Gibt es für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, dass $|\,\mathbf{A}\,| = 4$ und $\mathbf{A}$ positiv definit ist? Wenn ja, bestimmen Sie a.

Lösung:

Aufgabe 2

Ein landwirtschaftlicher Betrieb baut die Fruchtarten F_1 , F_2 , F_3 an. Dabei setzt er die Maschinen M_1 , M_2 ein. Die benötigten Zeiten (in Stunden / Hektar) sowie die Anbaufläche (in Hektar) liegen in Tabellenform vor:

	M_1	M_2	Anbaufläche
F_1	6	3	5
F_2	2	5	5
F_3	4	4	5

Die Maschinenkosten für M_1 , M_2 betragen 50 bzw. 100 DM / Stunde.

(a) Stellen Sie die Angaben durch eine Matrix und zwei Vektoren dar.

Verwenden Sie *ausschließlich* diese Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Wie hoch sind die Kosten je Hektar Anbaufläche für die einzelnen Fruchtarten?

(c) Wie lange wird jede der beiden Maschinen insgesamt eingesetzt?

(d) Wie hoch sind die dabei entstehenden Gesamtkosten?

Lösung:

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Inverse der partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{u} \\ \mathbf{u}' & 7 \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Für eine partitionierte Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulärer Untermatrix $\mathbf{A}_{11}$ und regulärer Hilfsmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}$ berechnet sich die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ durch $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}(\,\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,) & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}$.

Lösung:

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$ einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an.

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	1	1	6
2	2	3	14
3	5	5	26

Lösung zu (a)

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	1	1	6
2	2	3	14
3	3	4	21

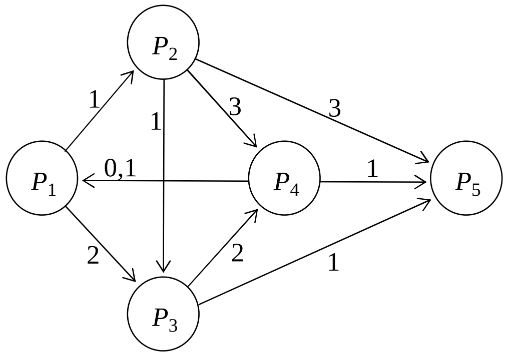
Lösung zu (b)

(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	1	1	6
2	2	3	14
5	5	7	34

Lösung zu (c)

Aufgabe 6



Ein Produkt P_5 wird über Zwischenprodukte $P_1, \ldots, P_4$ hergestellt. Der Produktionsprozess ist durch einen Gozintografen dargestellt. Wie viele Mengeneinheiten (ME) $P_1, \ldots, P_4$ werden zur Herstellung *einer* ME P_5 benötigt?

Hinweis: Die Zahl 3 an dem Pfeil von P_2 nach P_5 bedeutet beispielsweise, dass zur Produktion *einer* ME P_5 *drei* ME P_2 benötigt werden.

Lösung:

Aufgabe 7

Die Spur einer symmetrischen 2×2-Matrix **A** beträgt 4, die Determinante ist 3.

(a) Welche beiden Bedingungen ergeben sich daraus für die Eigenwerte λ_1 , λ_2 von **A**?

(b) Berechnen Sie λ_1 und λ_2 .

(c) Welche Aussage lässt sich über die Definitheit von **A** machen ? (Begründung !)

(d) Berechnen Sie $|\,(\frac{1}{6}\mathbf{A}\,)^{-1}\,|$.

Lösung:

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2' + w_3\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3'$ einer 3×3-Matrix **A** ergibt

$$w_1 = 1 = w_2\,,\quad w_3 = 0,\quad \mathbf{u}_1 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_2 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}.$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix **A** ? (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen - genau eine Lösung - unendlich viele Lösungen - keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}$? (Begründung!)

Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\cdot\mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems ?

(c) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$.

Lösung:

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1 , P_2 an den Fertigungsstellen F_1 , F_2 , F_3 , F_4 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefasst:

	P_1	P_2	Kapazität
F_1	3	2	300
F_2	0,5	1	40
F_3	2	3	150
F_4	4	6	360
DB	60	100	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf!

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
u_1	2	0	1	–2	0	0	220	
x_2	0,5	1	0	1	0	0	40	
u_3	0,5	0	0	–3	1	0	30	
u_4	1	0	0	–6	0	1	120	
z	–10	0	0	100	0	0	4000	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?
(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
u_1	0	0	1	10	–4	0	100
x_2	0	1	0	4	–1	0	10
x_1	1	0	0	–6	2	0	60
u_4	0	0	0	0	–2	1	60
z	0	0	0	40	20	0	4600

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1 , x_2 ?

– Welcher DB wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?

– Um wie viele Einheiten steigt der DB, wenn die Ausgangskapazität von F_2 um eine Einheit erhöht wird?