RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

7.12.2002 (WS 2002/03)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & a \end{pmatrix}$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, dass $|\mathbf{A}| = 1$ ist.

(b) Welche Aussage lässt sich dann über die Definitheit von **A** treffen ? (Begründung!)

Aufgabe 2

Ein landwirtschaftlicher Betrieb baut die Fruchtarten F_1 und F_2 an. Dabei setzt er die Maschinen M_1 , M_2 , M_3 ein.
Die benötigten Zeiten (in Stunden / Hektar), die Anbaufläche (in Hektar) sowie die Maschinenkosten (in € / Stunde) liegen in Tabellenform vor:

	M_1	M_2	M_3	Anbaufläche
F_1	6	4	2	10
F_2	1	2	3	20
Maschinenkosten	100	75	50	

(a) Stellen Sie die Angaben durch eine Matrix und zwei Vektoren dar.
Verwenden Sie *ausschließlich* diese Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Wie hoch sind die Kosten je Hektar Anbaufläche für die einzelnen Fruchtarten?

(c) Wie lange wird jede der drei Maschinen insgesamt eingesetzt?

(d) Wie hoch sind die dabei entstehenden Gesamtkosten?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Inverse der partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{B}^3 \\ \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{B}-\mathbf{I} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}$ regulär.

Hinweis: Für eine partitionierte Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulärer Untermatrix $\mathbf{A}_{11}$ und regulärer Hilfsmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}$ berechnet sich die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ durch $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}) & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$ einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an.

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	0	−2	1
−1	1	3	2
2	1	−3	5

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	0	−2	1
−1	1	3	2
1	1	−1	3

(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	0	−2	1
−1	1	3	2
−1	1	1	0

Aufgabe 6

Die drei Hilfsabteilungen N_1 , N_2 , N_3 geben an die beiden Hauptabteilungen H_1 , H_2 Leistungen ab, "beliefern" sich aber auch gegenseitig. Die Höhe dieses Leistungstransfers - gemessen in Leistungseinheiten (LE) - sowie die Primärkosten der Hilfsabteilungen werden durch folgende Tabelle abgebildet:

		Empfänger					
		N_1	N_2	N_3	H_1	H_2	Primärkosten
Lieferant	N_1	-	3	2	7	8	360
	N_2	4	-	2	4	5	450
	N_3	4	3	-	2	1	420

(a) Bestimmen Sie die Verrechnungspreise p_i in € / LE für jede der Abteilungen N_i .

(b) Verteilen Sie die primären Gesamtkosten auf die Hauptabteilungen H_1 , H_2 .

Aufgabe 7

A sei eine symmetrische, idempotente 4×4 Matrix mit den Hauptdiagonalelementen $a_{11} = \frac{16}{25}$, $a_{22} = \frac{4}{25} = a_{33}$, $a_{44} = \frac{1}{25}$.

(a) Welche beiden Bedingungen ergeben sich daraus für die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$?

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von **A** .

(c) Ermitteln Sie den zum größten Eigenwert gehörenden Eigenvektor, dessen Koeffizienten alle ≥ 0 sind.

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{UWV}' = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2'$ einer 4×2-Matrix $\mathbf{A}$ ergibt

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W} = \sqrt{5}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix $\mathbf{A}$? (Begründung!)

(b) Welche Eigenschaft besitzt in diesem Fall die Matrix
$\mathbf{A}^+ = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2'$ mit $w_i^+ = 1/w_i$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$ sonst.

(c) Welche der Lösungsmengen - genau eine Lösung - unendlich viele Lösungen - keine Lösung
erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit sei $\mathbf{b} = 5\,(1, 0, 0, -1)'$? (Begründung!)

(d) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\cdot\mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems ?

(e) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$.

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1, P_2, P_3 an den Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefasst:

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	2	0	2	40
F_2	3	1	1	60
F_3	1	1	0	30
DB	5	10	15	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf!

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.	θ
x_3	1	0	1	0,5	0	0	20	
u_2	2	1	0	–0,5	1	0	40	
u_3	1	1	0	0	0	1	30	
z	10	–10	0	7,5	0	0	300	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?
(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
x_3	1	0	1	0,5	0	0	20
u_2	1	0	0	–0,5	1	–1	10
x_2	1	1	0	0	0	1	30
z	20	0	0	7,5	0	10	600

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1, x_2, x_3 ?

– Welcher DB wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der DB, wenn die Ausgangskapazität der Fertigungsstelle 1 um eine Zeiteinheit erhöht wird?