RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

5.12.2003 (WS 2003/04)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & a-1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, dass $|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| = |\mathbf{B}'\mathbf{B}|$ ist.

Aufgabe 2

Ein Weihnachtsmann steht vor der Aufgabe, einige ausgesuchte Haushalte aus drei Ländern L_1 , L_2 , L_3 mit Gabentellern zu versorgen. Der Gabenteller setzt sich aus Früchten F, Nüssen N und Süßigkeiten S zusammen. Die von Land zu Land unterschiedliche Zusammensetzung liegt in Tabellenform vor (in kg / Teller):

	L_1	L_2	L_3
F	0,5	0,3	0,4
N	0,1	0,2	0,3
S	0,1	0,1	–

In jedem der Länder werden 100 Haushalte beliefert.

Die Einkaufspreise für Früchte, Nüsse bzw. Süßigkeiten betragen 3 €, 6 € bzw. 9 € pro kg.

(a) Stellen Sie die obigen Angaben durch eine Matrix und zwei Vektoren dar.

Verwenden Sie *ausschließlich* diese Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Wie viele kg Früchte, Nüsse bzw. Süßigkeiten werden zur Versorgung aller Haushalte insgesamt benötigt?

(c) Welche Kosten pro Gabenteller entstehen in jedem der drei Länder?

(d) Wie hoch sind die Gesamtkosten zur Versorgung aller Haushalte?

A 3

Aufgabe 3

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A} & \mathbf{A} \end{pmatrix}$ sei eine die partitionierte Matrix mit orthonormaler Untermatrix $\mathbf{A}$. Bestimmen Sie $(\mathbf{M}'\,\mathbf{M})^3$.

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$ einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie (a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

A 5

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems an, ggf. in Parameterform.

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	4
4	5	6	10
3	5	5	8

(b)

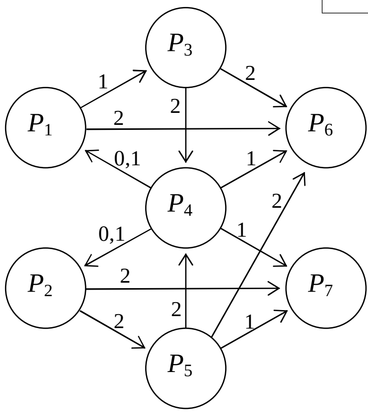
x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	4
4	5	6	10
2	3	4	5

(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	4
4	5	6	10
3	5	7	10

A 6

Aufgabe 6



Die Produkte P_6 , P_7 werden aus Rohstoffen P_1 , P_2 über Zwischenprodukte P_3 , P_4 , P_5 gefertigt. Der Produktionsprozess ist durch einen Gozintografen dargestellt.
Wie viele Mengeneinheiten (ME) P_1 , ... , P_5 werden zur Herstellung von 10 ME P_6 und 10 ME P_7 insgesamt benötigt?

Hinweis: Die Zahl 2 an dem Pfeil von P_3 nach P_6 bedeutet beispielsweise, dass zur Produktion *einer* ME P_6 *zwei* ME P_3 benötigt werden.

Aufgabe 7

A 7

Eine symmetrische 4×4-Matrix **A** besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -2$.

(a) Berechnen Sie $|\,\mathbf{A}\,|$.

(b) Ist **A** regulär? (Begründung!)

(c) Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ sowie deren Inverse.

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2' + w_3\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3'$ einer 5×3-Matrix **A** ergibt $w_1 = 3$, $w_2 = 2$, $w_3 = 0$,

$$\mathbf{u}_1 = \tfrac{1}{5}(3, 2, 2, 2, 2)', \quad \mathbf{u}_2 = \tfrac{1}{2}(0, -1, 1, -1, 1)', \quad \mathbf{v}_1 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix **A**? (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen – genau eine Lösung – unendlich viele Lösungen – keine Lösung erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = 3\cdot(3, 1, 3, 1, 3)'$? (Begründung!)

(c) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\cdot\mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems?
Dabei ist $\mathbf{A}^+ = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2' + w_3^+\mathbf{v}_3\mathbf{u}_3'$ mit $w_i^+ = 1/w_i$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$ sonst.

(d) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$.

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1, P_2, P_3 an den Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (*DB*) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefasst:

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	1	1	3	60
F_2	2	0	2	40
F_3	0	1	1	30
DB	15	10	5	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des *DB* auf!

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.	θ
u_1	0	1	2	1	–0,5	0	40	
x_1	1	0	1	0	0,5	0	20	
u_3	0	1	1	0	0	1	30	
z	0	–10	10	0	7,5	0	300	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen?
Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!
Welche Variable ist aus der Basis zu eliminieren?

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
u_1	0	0	1	1	–0,5	–1	10
x_1	1	0	1	0	0,5	0	20
x_2	0	1	1	0	0	1	30
z	0	0	20	0	7,5	10	600

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1, x_2, x_3 ?

– Welcher *DB* wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der *DB*, wenn die Kapazität der Fertigungsstelle 3 um eine Einheit erhöht wird?