RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

4.12.2004 (WS 2004/2005)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	
Unterschrift	

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, dass $|\,\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}\,| = \text{Spur}(\,\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}\,)$ ist.

Aufgabe 2

Ein Unternehmen stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 her. Aus diesen Zwischenprodukten werden die Vorprodukte V_1, V_2, V_3, V_4 erzeugt und daraus die Endprodukte E_1, E_2, E_3.
Die zur Herstellung benötigten Mengen sind in drei Tabellen zusammengefasst:

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
R_1	1	2	0	2
R_2	1	0	3	1
R_3	2	1	2	0
R_4	1	3	0	1
R_5	1	1	1	2

	V_1	V_2	V_3	V_4
Z_1	1	0	3	2
Z_2	1	2	0	1
Z_3	1	2	0	1
Z_4	1	1	2	2

	E_1	E_2	E_3
V_1	1	0	2
V_2	0	0	5
V_3	5	0	0
V_4	0	5	0

Das Produktionssoll beträgt 10 ME für E_1 , 10 ME für E_2 und 10 ME für E_3.

(a) Stellen Sie die obigen Angaben durch drei Matrizen und einen Vektor dar.
Verwenden Sie *ausschließlich* diese Matrizen bzw. diesen Vektor zur Lösung der Teilaufgaben (b), (c), (d).

(b) Bestimmen Sie die Matrix des Rohstoffverbrauchs für die Vorprodukte V_1 , ... , V_4 .

(c) Ermitteln Sie die Matrix des Rohstoffverbrauchs für die Endprodukte E_1 , E_2 , E_3 .

(d) Wie hoch ist der Rohstoffbedarf zur Herstellung des Produktionssolls ?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Inverse der partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}-\mathbf{I} & \mathbf{B}^2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}$ regulär.

Hinweis: Für eine partitionierte Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulärer Untermatrix $\mathbf{A}_{11}$ und regulärer Hilfsmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$ berechnet sich die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ durch $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}) & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$ einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie (a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems an, bei ∞ vielen Lösungen in Parameterform.

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	–3	2	6
–2	1	1	–2
1	–8	7	17

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	–3	2	6
–2	1	1	–2
1	2	3	8

(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	–3	2	6
–2	1	1	–2
–1	–2	3	4

Aufgabe 6

Die Produkte P_1, P_2, P_3 eines Unternehmens werden in den Ländern L_1, L_2, L_3, L_4 verkauft. Die geplanten Verkaufsmengen für jedes Produkt und Land sowie die geplanten Umsätze in den vier Ländern liegen in Tabellenform vor:

	P_1	P_2	P_3	Geplanter Umsatz
L_1	1	1	1	140
L_2	1	0	2	180
L_3	2	3	1	240
L_4	3	2	2	300

Wie hoch müssen die Preise p_1, p_2, p_3 für die drei Produkte gewählt werden, damit die Umsatzziele in den einzelnen Ländern erreicht werden?

A 7

Aufgabe 7

Gegeben ist eine 4×4-Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{v}\,\mathbf{v}'$ mit $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Welchen Rang besitzt **A** ?

(b) Berechnen Sie die Spur von **A**.

(c) Bestimmen Sie unter Verwendung der Information aus (a) und (b) die vier Eigenwerte λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 von **A** .

(d) Ermitteln Sie den zum größten Eigenwert λ_1 gehörenden Eigenvektor $\mathbf{x}_1$, dessen Koeffizienten alle ≥ 0 sind.

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{UWV}'$ einer 3×2-Matrix $\mathbf{A}$ ergibt $\mathbf{A} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix $\mathbf{A}$? (Begründung!)

(b) Welche Eigenschaft besitzt in diesem Fall die Matrix $\mathbf{A}^+ = \mathbf{VW}^+\mathbf{U}' = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2'$?

Dabei ist $\mathbf{W}^+ = \begin{pmatrix} w_1^+ & 0 \\ 0 & w_2^+ \end{pmatrix}$, $w_i^+ = 1/w_i$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$ sonst.

(c) Welche der Lösungsmengen – genau eine Lösung – unendlich viele Lösungen – keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = 100 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$? (Begründung!)

(d) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems?

(e) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$.

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1, P_2 an den Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3, F_4 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (*DB*) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefasst:

	P_1	P_2	Kapazität
F_1	1	0,5	20
F_2	8	5	200
F_3	3	2	75
F_4	4	4	160
DB	70	40	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des *DB* auf!

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_1	1	0,5	1	0	0	0	20	
u_2	0	1	–8	1	0	0	40	
u_3	0	0,5	–3	0	1	0	15	
u_4	0	2	–4	0	0	1	80	
z	0	–5	70	0	0	0	1400	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen?
Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!
Welche Variable ist aus der Basis zu eliminieren?

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_1	1	0	4	0	–1	0	5
u_2	0	0	–2	1	–2	0	10
x_2	0	1	–6	0	2	0	30
u_4	0	0	8	0	–4	1	20
z	0	0	40	0	10	0	1550

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1, x_2 ?

– Welcher *DB* wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der *DB*, wenn die Kapazität der Fertigungsstelle 3 um eine Einheit erhöht wird?