RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

9.12.2005 (Wintersemester 2005/2006)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	
Unterschrift	

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, dass $|\,\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{A}\,| = \mathrm{Spur}(\,\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{A}\,)$ ist.

Aufgabe 2

Ein Weihnachtsmann steht vor der Aufgabe, einige ausgesuchte Haushalte aus drei Ländern L_1 , L_2 , L_3 mit Gabentellern zu versorgen. Der Gabenteller setzt sich aus Früchten F, Nüssen N und Süßigkeiten S zusammen. Die von Land zu Land unterschiedliche Zusammensetzung liegt in Tabellenform vor (in kg / Teller):

	L_1	L_2	L_3
F	0,5	0,3	0,4
N	0,1	0,2	0,3
S	0,1	0,1	–

In jedem der Länder werden 100 Haushalte beliefert.

Die Einkaufspreise für Früchte, Nüsse bzw. Süßigkeiten betragen 3 €, 6 € bzw. 9 € pro kg.

(a) Stellen Sie die obigen Angaben durch eine Matrix und zwei Vektoren dar.

Verwenden Sie *ausschließlich* diese Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Wie viele kg Früchte, Nüsse bzw. Süßigkeiten werden zur Versorgung aller Haushalte insgesamt benötigt?

(c) Welche Kosten pro Gabenteller entstehen in jedem der drei Länder?

(d) Wie hoch sind die Gesamtkosten zur Versorgung aller Haushalte?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Inverse der partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{B}^2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{B}+\mathbf{I} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}$ regulär.

Hinweis: Die Inverse $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}$ einer partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulärer Untermatrix $\mathbf{A}_{11}$ und regulärer Hilfsmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}$ berechnet sich durch $\mathbf{M}_{11} = \mathbf{A}_{11}^{-1}\,(\,\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,)$,
$\mathbf{M}_{12} = -\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1}$, $\mathbf{M}_{21} = -\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}$, $\mathbf{M}_{22} = \mathbf{C}^{-1}$.

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung **A** = **L** · **R** einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems an, bei ∞ vielen Lösungen in Parameterform.

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	4
4	5	6	10
3	5	7	10

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	4
4	5	6	10
3	5	5	8

(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	4
4	5	6	10
2	3	4	5

Aufgabe 6

Die drei Hilfsabteilungen N_1, N_2, N_3 geben an die beiden Hauptabteilungen H_1, H_2 Leistungen ab, "beliefern" sich aber auch gegenseitig. Die Höhe dieses Leistungstransfers – gemessen in Leistungseinheiten (LE) – sowie die in den Hilfsabteilungen angefallenen primären Kosten liegen in Tabellenform vor:

		Empfänger					
		N_1	N_2	N_3	H_1	H_2	Primärkosten
	N_1	–	4	5	16	10	600
Lieferant	N_2	5	–	5	8	10	800
	N_3	5	4	–	12	14	1400

(a) Bestimmen Sie die Verrechnungspreise p_i in €/LE für jede der Abteilungen N_i.

(b) Verteilen Sie die primären Gesamtkosten auf die Hauptabteilungen H_1, H_2.

Aufgabe 7

A sei eine symmetrische, idempotente 3×3 Matrix mit den Hauptdiagonalelementen $a_{11} = \frac{1}{3}$, $a_{22} = \frac{2}{3}$, $a_{33} = 1$.

(a) Welche beiden Bedingungen ergeben sich daraus für die Eigenwerte λ_1 , λ_2 , λ_3 ?

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und den Rang von **A** .

(c) Ermitteln Sie die Eigenwerte und den Rang von $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$.

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2' + w_3\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3'$ einer 3×3-Matrix $\mathbf{A}$ ergibt $w_1 = 1$, $w_2 = \frac{1}{2}$, $w_3 = \frac{1}{3}$,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{3\cdot\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{3\cdot\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}.$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix $\mathbf{A}$? (Begründung!)

(b) Welche Eigenschaft besitzt in diesem Fall die Matrix $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{W}^+\mathbf{U}' = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2' + w_3^+\mathbf{v}_3\mathbf{u}_3'$?

Dabei ist $\mathbf{W}^+ = \begin{pmatrix} w_1^+ & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_n^+ \end{pmatrix}$, $\quad w_i^+ = \begin{cases} \frac{1}{w_i} & \text{falls } w_i \neq 0 \\ 0 & \phantom{\text{falls }} w_i = 0 \end{cases}$.

(c) Welche der Lösungsmengen - genau eine Lösung - unendlich viele Lösungen - keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}$? (Begründung!)

Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\cdot\mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems?

(d) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$.

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1, P_2, P_3 an den Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefasst:

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	2	0	2	40
F_2	3	1	1	60
F_3	1	1	0	30
DB	5	10	15	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf!

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.	θ
x_3	1	0	1	0,5	0	0	20	
u_2	2	1	0	–0,5	1	0	40	
u_3	1	1	0	0	0	1	30	
z	10	–10	0	7,5	0	0	300	

– Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen?

– Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!

– Welche Variable ist aus der Basis zu eliminieren?

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
x_3	1	0	1	0,5	0	0	20
u_2	1	0	0	–0,5	1	–1	10
x_2	1	1	0	0	0	1	30
z	20	0	0	7,5	0	10	600

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1, x_2, x_3 ?

– Welcher DB wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der DB, wenn die Ausgangskapazität der Fertigungsstelle 3 um eine Zeiteinheit erhöht wird?