RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

9.12.2006 (Wintersemester 2006 / 2007)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	
Unterschrift	

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ r \end{pmatrix}$ eine Zahl $r > 0$ so, dass $\operatorname{Spur}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\mathbf{b}'(\mathbf{A}')^{-1} \right) = 34 \cdot |\,(\mathbf{A}^2)^{-1}\,|$ ist.

Aufgabe 2

Ein landwirtschaftlicher Betrieb baut die Fruchtarten F_1 , F_2 , F_3 an. Dabei setzt er die Maschinen M_1 , M_2 , M_3 ein.
Die benötigten Zeiten (in Stunden / Hektar), die Anbaufläche (in Hektar) sowie die Maschinenkosten (in € / Stunde) liegen in Tabellenform vor:

	M_1	M_2	M_3	Anbaufläche
F_1	2	6	3	3
F_2	6	2	1	1
F_3	4	0	5	2
Maschinenkosten	100	60	80	

(a) Stellen Sie die Angaben durch eine Matrix und zwei Vektoren dar.
Verwenden Sie *ausschließlich* diese Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Wie hoch sind die Kosten je Hektar Anbaufläche für die einzelnen Fruchtarten?

(c) Wie lange wird jede der drei Maschinen insgesamt eingesetzt?

(d) Wie hoch sind die dabei entstehenden Gesamtkosten?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Inverse der partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\,\mathbf{B} & -\mathbf{B} \\ -5\,\mathbf{B} & 3\,\mathbf{B} \end{pmatrix}$ mit regulärer Untermatrix $\mathbf{B}$.

Hinweis: Die Inverse $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}$ einer partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulärer Untermatrix $\mathbf{A}_{11}$ und regulärer Hilfsmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}$ berechnet sich durch $\mathbf{M}_{11} = \mathbf{A}_{11}^{-1}\,(\,\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,)$, $\mathbf{M}_{12} = -\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1}$, $\mathbf{M}_{21} = -\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}$, $\mathbf{M}_{22} = \mathbf{C}^{-1}$.

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$ einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems an, bei ∞ vielen Lösungen in Parameterform.

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
3	−4	1	7
2	−1	−1	3
1	−3	2	4

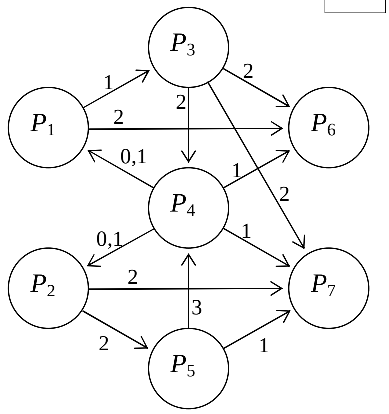
(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
3	−4	1	7
2	−1	−1	3
1	−3	−2	4

(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
3	−4	1	7
2	−1	−1	3
4	−7	3	10

Aufgabe 6



Die Produkte P_6 , P_7 werden aus Rohstoffen P_1 , P_2 über Zwischenprodukte P_3 , P_4 , P_5 gefertigt. Der Produktionsprozess ist durch einen Gozintografen dargestellt.

Wie viele Mengeneinheiten (ME) P_1 , ... , P_5 werden zur Herstellung von 10 ME P_6 und 10 ME P_7 insgesamt benötigt?

Hinweis: Die Zahl 2 an dem Pfeil von P_3 nach P_7 bedeutet beispielsweise, dass zur Produktion *einer* ME P_7 *zwei* ME P_3 benötigt werden.

Aufgabe 7

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) Berechnen Sie $|\, \mathbf{A} \,|$.

(c) Ist **A** regulär ? (Begründung !)

(d) Welche Aussage lässt sich über die Definitheit von **A** machen ? (Begründung !)

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{UWV}' = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2' + w_3\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3'$ einer 4×3-Matrix $\mathbf{A}$ ergibt

$$w_1 = \sqrt{2}\,, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = 0, \quad \mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix $\mathbf{A}$? (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen - genau eine Lösung - unendlich viele Lösungen - keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$? (Begründung!)

(c) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems ?

Dabei ist $\mathbf{A}^+ = \mathbf{VW}^+\mathbf{U}' = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2' + w_3^+\mathbf{v}_3\mathbf{u}_3'$, $w_i^+ = \begin{cases} \frac{1}{w_i} & \text{falls } w_i \neq 0 \\ 0 & \phantom{\text{falls }} w_i = 0 \end{cases}.$

(d) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$.

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte $P_1, \ldots, P_5$ an den Fertigungsstellen $F_1, \ldots, F_4$ her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefasst:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Kapazität
F_1	2	1	1	2	3	12
F_2	1	1	2	0	1	8
F_3	1	1	0	3	0	10
F_4	0	1	0	1	1	4
DB	1	5	2	2	1	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf!

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z										

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
u_1	2	0	1	1	2	1	0	0	–1	8	
u_2	1	0	2	–1	0	0	1	0	–1	4	
u_3	1	0	0	2	–1	0	0	1	–1	6	
x_2	0	1	0	1	1	0	0	0	1	4	
z	–1	0	–2	3	4	0	0	0	5	20	

– Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen?

– Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement.

– Welche Variable ist aus der Basis zu eliminieren?

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
u_1	1,5	0	0	1,5	2	1	–0,5	0	–0,5	6
x_3	0,5	0	1	–0,5	0	0	0,5	0	–0,5	2
u_3	1	0	0	2	–1	0	0	1	–1	6
x_2	0	1	0	1	1	0	0	0	1	4
z	0	0	0	2	4	0	1	0	4	24

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen $x_1, \ldots, x_5$?

– Welcher DB wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der DB, wenn die Ausgangskapazität der Fertigungsstelle 2 um eine Zeiteinheit erhöht wird?