Mathematik für Ökonomen II
WS 1991/1992

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 1

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie Zahlen $a, b \in R$, für die

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und gleichzeitig $a + b + 1 = 0$ gilt.

Lösung zu Aufgabe 1:

Mathematik für Ökonomen II
WS 1991/1992

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 2

Aufgabe 2:

Ein Unernehmen stellt aus 4 Rohstoffen (R_1 , R_2 , R_3 , R_4) 3 Zwischenprodukte (Z_1 , Z_2 , Z_3) und daraus zwei Endprodukte (E_1 , E_2) her. Die dazu benötigten Einsatzmengen sind in zwei Tabellen zusammengefaßt:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	1	1
R_2	2	1	0
R_3	0	2	1
R_4	1	0	2

	E_1	E_2
Z_1	1	1
Z_2	2	0
Z_3	0	2

Das Produktionssoll beträgt 10 Mengeneinheiten (ME) für E_1 und 5 ME für E_2. Die Rohstoffkosten belaufen sich auf jeweils 1 DM/ME für R_1 und R_4 sowie jeweils 2 DM/ME für R_2 und R_3.
Aufgrund dieser Angaben gelangt das Unternehmen zu folgenden Ergebnissen:

(a) Zur Produktion von E_1 bzw. E_2 benötigt man folgende Rohstoffmengen:

	E_1	E_2
R_1	3	3
R_2	4	2
R_3	4	2
R_4	1	5

(b) Der Bedarf an Rohstoffen zur Erfüllung des Produktionssolls beträgt 45 ME von R_1, 50 ME von R_2, 50 ME von R_3 und 35 ME von R_4.

(c) Dabei entstehen Rohstoffkosten in Höhe von 280 DM.

Stellen Sie die Aussagen von (a), (b) und (c) dar als Ergebnisse von Matrix- bzw. Vektoroperationen (mit geeignet definierten Matrizen bzw. Vektoren) und überprüfen Sie so die Richtigkeit der Aussagen.

Lösung zu Aufgabe 2:

Mathematik für Ökonomen II
WS 1991/1992

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 3

Aufgabe 3:

Berechnen Sie für **Z**=**X**·**Y**

mit $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

die Potenzen $\mathbf{Z}^4 = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}$ und $\mathbf{Z}^5 = \mathbf{Z}^4 \cdot \mathbf{Z}$

(Tip: Paritionieren Sie **X** und **Y** !)

Lösung zu Aufgabe 3:

Mathematik für Ökonomen II
WS 1991/1992

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 4

Aufgabe 4:

Die **L**-**R**-Zerlegung **A** = **L** · **R** einer quadratischen Matrix **A** ist

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Berechnen Sie

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des Linearen Gleichungssystems **Ax = b** mit $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 4:

Mathematik für Ökonomen II
WS 1991/1992

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 5

Aufgabe 5:

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen:

(a)
$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & r.S. \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{ccc|c} x_3 & x_2 & x_1 & r.S. \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_3 & x_2 & r.S. \\ \hline 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Geben Sie jeweils die Lösungsmenge des Gleichungssystems an!

Lösung zu Aufgabe 5:

Mathematik für Ökonomen II
WS 1991/1992

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 6

Aufgabe 6:

Die Absätze a_1, a_2 von 2 Produkten eines Unternehmens in Abhängigkeit ihrer Preise p_1, p_2 sind

$$a_1 = 8 - 2p_1 + p_2$$
$$a_2 = 9 + 2p_1 - 2p_2$$

Die variablen Kosten pro hergestellter (= abgesetzter) Mengeneinheit (ME) betragen
k_1 = 2 DM/ME bei Produkt 1 bzw. k_2 = 3 DM/ME bei Produkt 2.
Wie müssen die Preise p1, p2 gewählt werden, damit der Deckungsbeitrag maximal wird?
(Deckungsbeitrag = Umsatz - variable Kosten)

Lösung zu Aufgabe 6:

Mathematik für Ökonomen II
WS 1991/1992

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 7

Aufgabe 7:

Die Singulärwertzerlegung einer (5 x 3)-Matrix **A**, **A** = **UWV'** , ergibt für die Diagonalmatrix **W** die Elemente $w_1 = 3$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1$.

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix **A**! (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen
- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- keine Lösung

können bei einem linearen Gleichungssystem **Ax** = **b** mit obiger Matrix **A** auftreten?

(c) Multiplizieren Sie das Gleichungssystem von links mit der Matrix $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{U}'$.
Welche Eigenschaft besitzt in diesem Fall
- die Matrix $\mathbf{A}^+ \mathbf{A}$
- der Vektor $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+ \mathbf{b}$?

Lösung zu Aufgabe 7:

Mathematik für Ökonomen II
WS 1991/1992

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 8

Aufgabe 8:

Eine symmetrische Matrix **A** der Ordnung (5 x 5) besitzt die Eigenwerte
$\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ mit $\lambda_2 = \ldots = \lambda_5 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$.

(a) Ist **A** regulär? (Begründung!)

(b) Berechnen Sie **A**, $\mathbf{A}^2$ und $\mathbf{A}^{10}$ in Abhängigkeit von λ_1 und dem korrespondierenden Eigenvektor $\mathbf{x}^1$!

Lösung zu Aufgabe 8:

Mathematik für Ökonomen II
WS 1991/1992

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 9

Aufgabe 9:

Ein Unternehmen stellt die beiden Produkte P_1 und P_2 an drei Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

	P_1	P_2	Kapazität
F_1	2	5	40
F_2	2	3	28
F_3	2	1	20
DB	2	2	

Bei der Berechnung des DB-maximalen Produktionsprogrammes mit Hilfe des Simplex-Algorithmus ergeben sich die nachstehenden Tabellen:

(I)

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	r.S.	Θ
u_1	0	0	1	-2	1	4	
x_2	0	1	0	0,5	-0,5	4	
x_1	1	0	0	-0,25	0,75	8	
z	0	0	0	0,5	0,5	24	

(II)

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	r.S.	Θ
u_1	2	5	1	0	0	40	
u_2	2	3	0	1	0	28	
u_3	2	1	0	0	1	20	
z	-2	-2	0	0	0	0	

(III)

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	r.S.	Θ
u_1	0	4	1	0	-1	20	
u_2	0	2	0	1	-1	8	
x_1	1	0,5	0	0	0,5	10	
z	0	-1	0	0	1	20	

(a) Geben Sie jeweils an. ob es sich um das Anfangstableau, das Endtableau oder ein Zwischentableau handelt!

(b) Interpretieren Sie das Endtableau:
- Wie lauten die optimalen Produktionsmengen?
- Welcher DB wird dabei erzielt?
- An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wieviel freie Kapazität?

(c) Ermitteln Sie beim Zwischentableau das nächste Pivotelement:
Welche Variable sollte aus der Basis eliminiert werden, welche Variable neu in die Basis aufgenommen werden?
(Pivotelement im entsprechenden Tableau markieren!)

Lösung zu Aufgabe 9: