RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR Mathematik für Ökonomen II

13.02.1993 (WS 92/93)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Die endgültige Lösung muß auf das jeweilige Aufgabenblatt oder die betreffende Rückseite geschrieben werden.

Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 1

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie eine Zahl $a > 0$ so, daß

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right) = 8 \qquad !$$

Lösung zu Aufgabe 1:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 2

Aufgabe 2:

Ein landwirtschaftlicher Betrieb baut drei Fruchtarten F_1 , F_2 und F_3 an.
Die Anbaufläche (in Hektar [ha]) beträgt 2 ha für F_1 , 1 ha für F_2 und 3 ha für F_3.
Dabei setzt er die beiden Maschinen M_1 und M_2 ein, die folgende Zeiten benötigen (in Stunden / Hektar):

	M_1	M_2
F_1	7	2
F_2	3	10
F_3	1	2

Die Kosten pro Maschinenstunde betragen 50 DM für M_1 und 75 DM für M_2 .

(a) Stellen Sie die obigen Angaben durch geeignet definierte Matrizen bzw. Vektoren dar!

Verwenden Sie diese Matrizen bzw. Vektoren um folgende Fragen zu beantworten:

(b) Wie hoch sind die Kosten je ha Anbaufläche für die einzelnen Fruchtarten?

(c) Wie lange wird jede der beiden Maschinen insgesamt eingesetzt?

(d) Wie hoch sind die dabei entstehenden Gesamtkosten?

Lösung zu Aufgabe 2:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 3

Aufgabe 3:

Gegeben Sei die Matrix $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$, wobei **B** eine reguläre Teilmatrix von **X** ist.

Bestimmen Sie $\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}$!

Hinweis:

Für eine Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulären Matrizen $\mathbf{A}_{11}$ und $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$

gilt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\right) & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 3:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 4

Aufgabe 4:

Für eine quadratische Matrix **A** gilt die Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}'$ mit

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Berechnen Sie

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des Linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ 19 \end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 4:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 5

Aufgabe 5:

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen:

(a)

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	0	0	1
0	1	2	1
0	2	4	3

(b)

x_1	x_3	x_2	$r.S.$
1	0	0	1
0	1	2	1
0	2	4	2

(c)

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	0	0	1
0	1	2	1
0	2	5	3

Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an!

Lösung zu Aufgabe 5:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 6

Aufgabe 6:

Die Absätze a_i von 3 Produkten eines Unternehmens in Abhängigkeit ihrer Preise p_i sind

$$a_1 = 20 - 2p_1 + p_2 + p_3$$
$$a_2 = 10 + 3p_1 - 5p_2 + p_3$$
$$a_3 = 10 + 3p_1 + p_2 - 11p_3$$

Bei welchen Preisen wird der Umsatz maximal?

Lösung zu Aufgabe 6:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 7

Aufgabe 7:

Die Singulärwertzerlegung der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt $\mathbf{A} = \mathbf{UWV'} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2'$ mit

$$w_1 = \sqrt{3}\,,\ w_2 = 1\,,\ \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix **A**? (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen

- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit obiger Matrix **A** und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

(Begründung !)

(c) Berechnen Sie mit Hilfe obiger Zerlegung eine "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{VW}^+\mathbf{U}'\mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems!

($\mathbf{W}^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

(d) Welche Eigenschaft besitzt diese "Lösung" ?

Lösung zu Aufgabe 7:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 8

Aufgabe 8:

Eine 3x3-Matrix **A** besitze die Eigenwerte $\lambda_1 = 3 = \lambda_2$, $\lambda_3 = -3$.
Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ sowie deren Inverse!

Lösung zu Aufgabe 8:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 9

Aufgabe 9:

Ein Unternehmen stellt die beiden Produkte P_1 und P_2 an vier Fertigungsstellen F_1 , F_2 , F_3 , F_4 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

	P_1	P_2	Kapazität
F_1	1	0	12
F_2	0	1	10
F_3	1	2	26
F_4	2	1	28
DB	2	2	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf!

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	$r.S.$
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	$r.S.$	θ
x_1	1	0	1	0	0	0	12	
u_2	0	0	2	1	0	–1	6	
u_3	0	0	3	0	1	–2	6	
x_2	0	1	–2	0	0	1	4	
z	0	0	–2	0	0	2	32	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?

(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	$r.S.$	θ
x_1	1	0	0	0	$-1/3$	$2/3$	10	
u_2	0	0	0	1	$-2/3$	$1/3$	2	
u_1	0	0	1	0	$1/3$	$-2/3$	2	
x_2	0	1	0	0	$2/3$	$-1/3$	8	
z	0	0	0	0	$2/3$	$2/3$	36	

- Wie lauten die optimalen Produktionsmengen?
- Welcher DB wird dabei erzielt?
- An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wieviel freie Kapazität?

Lösung zu Aufgabe 9: