RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

04.12.1993 (WS 93/94)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Die endgültige Lösung muß auf das jeweilige Aufgabenblatt oder die betreffende Rückseite geschrieben werden.

Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 1

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Zahlen a, b, $c \in \mathbb{R}$ so, daß für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{gilt:} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})\,(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = (\mathbf{A} - \mathbf{B})\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \quad \text{und} \quad |\mathbf{A}| = 1\,.$$

Lösung zu Aufgabe 1:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 2

Aufgabe 2:

Ein Unternehmen stellt drei Produkte P_1 , P_2 und P_3 auf drei Maschinen M_1 , M_2 , M_3 her.
Die dazu benötigten Zeiten (in Minuten / Stück) sind in folgender Tabelle dargestellt:

	M_1	M_2	M_3
P_1	15	10	13
P_2	10	10	16
P_3	–	10	22

Das Produktionssoll beträgt 20 Stück für P_1, 30 Stück für P_2 und 10 Stück für P_3.
Die Kosten pro Maschinenstunde belaufen sich auf 60 DM für M_1 , 80 DM für M_2 und 100 DM für M_3.

(a) Stellen Sie die obigen Angaben durch geeignet definierte Matrizen bzw. Vektoren dar!

Verwenden Sie diese Matrizen bzw. Vektoren um folgende Fragen zu beantworten:

(b) Welche Maschinenkosten verursacht die Produktion von je einem Stück P_1 , P_2 bzw. P_3 ?

(c) Wie lange wird jede der drei Maschinen zur Herstellung des Produktionssolls insgesamt eingesetzt?

(d) Welche Maschinenkosten enstehen dabei insgesamt?

Lösung zu Aufgabe 2:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 3

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ der Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{B}'\mathbf{B}$ mit $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis:

Für eine Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulären Matrizen $\mathbf{A}_{11}$ und $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$ gilt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\right) & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 3:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 4

Aufgabe 4:

Die **L**-**R**-Zerlegung **A** = **L** · **R** einer quadratischen Matrix **A** ergibt

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad .$$

Berechnen Sie

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems **Ax = b** mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Lösung zu Aufgabe 4:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 5

Aufgabe 5:

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen:

(a)

x_1	x_2	$r.S.$
1	0	1
0	1	1
0	2	3

(b)

x_1	x_2	x_3	$r.S.$
1	0	2	5
0	1	1	3
1	0	3	6

(c)

x_1	x_2	x_3	x_4	$r.S.$
1	0	-2	-3	4
0	1	-1	-2	4
1	1	-3	-5	8

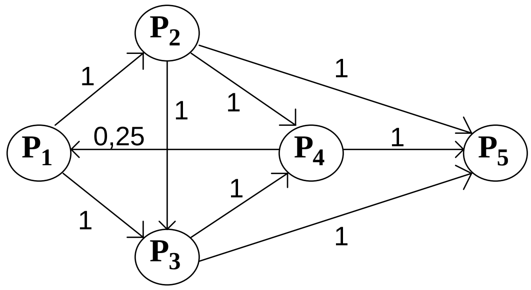
Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an!

Lösung zu Aufgabe 5:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 6

Aufgabe 6:

Ein Produkt P_5 wird über Zwischenprodukte P_1, ..., P_4 hergestellt. Der Produktionsprozeß ist durch folgenden Gozintographen dargestellt:



Wieviel Mengeneinheiten (ME) P_1, ..., P_4 werden zur Herstellung einer ME P_5 benötigt?

Hinweis: Die Zahl 1 an dem Pfeil von P_1 nach P_3 bedeutet beispielsweise, daß zur Produktion einer ME P_3 *eine* ME P_1 benötigt wird.

Lösung zu Aufgabe 6:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 7

Aufgabe 7:

(a) Stellen Sie die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ als äußeres Produkt zweier Vektoren **c**, **d** $\in \mathbb{R}^3$ dar:

$\mathbf{A} = \mathbf{c}\,\mathbf{d}'$. Normieren Sie **c** und **d** auf die Länge 1 und bestimmen so
$\mathbf{A} = w_1\,\mathbf{u}_1\,\mathbf{v}_1'$ mit $w_1 = |\mathbf{c}||\mathbf{d}|$, $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{|\mathbf{c}|}\mathbf{c}$, $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{|\mathbf{d}|}\mathbf{d}$.

(b) Welchen Rang besitzt die Matrix **A** und welche Werte müssen daher w_2 bzw. w_3 bei der Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2' + w_3\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3'$ der obigen Matrix **A** aufweisen (w_1 ,$\mathbf{u}_1$,$\mathbf{v}_1$ wie oben) ?

(c) Berechnen Sie eine "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit obiger Matrix **A** und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$(\mathbf{A}^+ = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2' + w_3^+\mathbf{v}_3\mathbf{u}_3'$; $w_i^+ = \frac{1}{w_i}$, falls $w_i \neq 0$; $w_i^+ = 0$, falls $w_i = 0)$

(d) Welche Eigenschaft besitzt $\mathbf{x}^+$?

Lösung zu Aufgabe 7:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 8

Aufgabe 8:

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{a}\,\mathbf{a}'$ mit $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$!

(b) Ist die Matrix **A** positiv semidefinit ? (Begründung !)

(c) Welche Eigenwerte besitzt $\mathbf{A}^2$?

Lösung zu Aufgabe 8:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 9

Aufgabe 9:

Ein Unternehmen stellt die drei Produkte P_1 , P_2 , P_3 an drei Fertigungsstellen F_1 , F_2 , F_3 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	1	1	0	30
F_2	1	3	1	60
F_3	0	2	2	40
DB	10	5	15	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf!

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	$r.S.$
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	$r.S.$	θ
x_1	1	1	0	1	0	0	30	
u_2	0	2	1	–1	1	0	30	
u_3	0	2	2	0	0	1	40	
z	0	5	–15	10	0	0	300	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?

(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	$r.S.$
x_1	1	1	0	1	0	0	30
u_2	0	1	0	–1	1	–0,5	10
x_3	0	1	1	0	0	0,5	20
z	0	20	0	10	0	7,5	600

- Wie lauten die optimalen Produktionsmengen?
- Welcher DB wird dabei erzielt?
- An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wieviel freie Kapazität?

Lösung zu Aufgabe 9: