RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

L i n e a r e A l g e b r a

03.12.1994 (WS 94/95)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Die endgültige Lösung muß auf das jeweilige Aufgabenblatt oder die betreffende Rückseite geschrieben werden.

Hilfsmittel: Taschenrechner

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 1

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ so, daß für

$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt: $\mathbf{v}'\mathbf{M}'\mathbf{D}\mathbf{M}\mathbf{v} = 0$ und $|\mathbf{D}| = -1$.

Lösung zu Aufgabe 1:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 2

Aufgabe 2:

Ein landwirtschaftlicher Betrieb baut zwei Fruchtarten F_1 und F_2 an.
Die Anbaufläche (in Hektar [ha]) beträgt 20 ha für F_1 und 10 ha für F_2 .
Dabei setzt er die drei Maschinen M_1 ,M_2 und M_3 ein, die folgende Zeiten benötigen
(in Stunden / Hektar):

	M_1	M_2	M_3
F_1	3	2	1
F_2	2	4	6

Die Kosten pro Maschinenstunde betragen 50 DM für M_1 ,100 DM für M_2 und 150 DM für M_3.

(a) Stellen Sie die obigen Angaben durch geeignet definierte Matrizen bzw. Vektoren dar!

Verwenden Sie diese Matrizen bzw. Vektoren um folgende Fragen zu beantworten:

(b) Wie hoch sind die Kosten je ha Anbaufläche für die einzelnen Fruchtarten?

(c) Wie lange wird jede der drei Maschinen insgesamt eingesetzt?

(d) Wie hoch sind die dabei entstehenden Gesamtkosten?

Lösung zu Aufgabe 2:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 3

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ der Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, wobei **B** eine reguläre Teilmatrix von **A** ist.

Hinweis:

Für eine Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulären Matrizen $\mathbf{A}_{11}$ und $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$ gilt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\right) & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 3:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 4

Aufgabe 4:

Die **L**-**R**-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$ einer quadratischen Matrix **A** ergibt

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

Berechnen Sie

(a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Lösung zu Aufgabe 4:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 5

Aufgabe 5:

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen:

(a)

x_1	x_2	$r.S.$
1	2	5
0	1	2
0	2	4

(b)

x_1	x_2	$r.S.$
1	2	5
2	4	10
3	6	15

(c)

x_1	x_2	$r.S.$
1	2	5
0	1	2
0	2	5

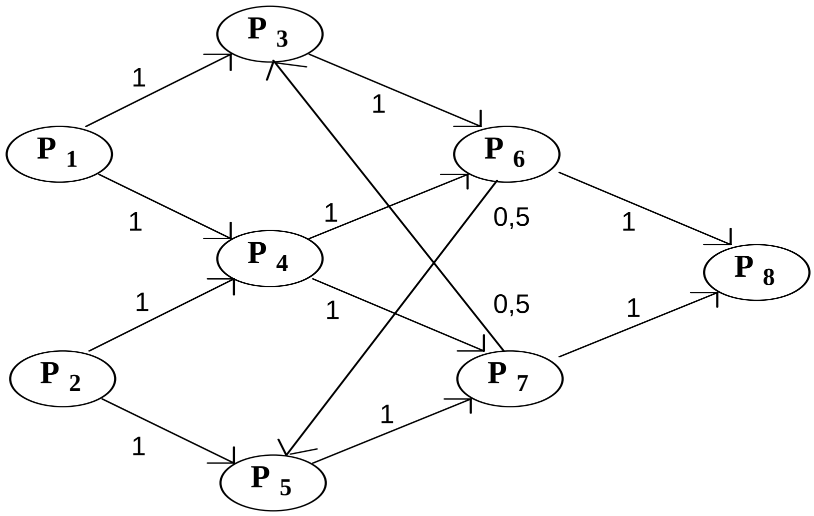
Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an!

Lösung zu Aufgabe 5:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 6

Aufgabe 6:

Ein Produkt P_8 wird über Zwischenprodukte P_1, ..., P_7 hergestellt. Der Produktionsprozeß ist durch folgenden Gozintographen dargestellt:



Wieviel Mengeneinheiten (ME) P_1, ..., P_7 werden zur Herstellung einer ME P_8 benötigt?

Hinweis: Die Zahl 1 an dem Pfeil von P_1 nach P_3 bedeutet beispielsweise, daß zur Produktion einer ME P_3 *eine* ME P_1 benötigt wird.

Lösung zu Aufgabe 6:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 7

Aufgabe 7:

Die Singulärwertzerlegung einer Matrix $\mathbf{A}$ ergibt

$$\mathbf{A} \;=\; \mathbf{UWV'} \;=\; \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \underbrace{5\sqrt{5}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{W}} \cdot \underbrace{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{V'}} \;.$$

(a) Ist $\mathbf{A}$ regulär? (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen

- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit obiger Matrix $\mathbf{A}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \end{pmatrix}$?

(Begründung !)

(c) Berechnen Sie mit Hilfe obiger Zerlegung eine "Lösung" $\mathbf{x}^+ \;=\; \mathbf{A}^+\mathbf{b} \;=\; \mathbf{VW}^+\mathbf{U'b}$ dieses Gleichungssystems!

($\mathbf{W}^+ = \dfrac{1}{5\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)

(d) Welche Eigenschaften besitzen $\mathbf{A}^+$ bzw $\mathbf{x}^+$?

Lösung zu Aufgabe 7:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 8

Aufgabe 8:

Die symmetrische 3×3-Matrix **A** besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = -1$.

(a) Ist **A** regulär? (Begründung !)

(b) Welche Aussage läßt sich über die Definitheit von **A** machen? (Begründung !)

(c) Bestimmen Sie $|\mathbf{A}|$.

(d) Berechnen Sie $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)$.

Lösung zu Aufgabe 8:

Teiln.-Nr.	Punkte	Aufgabe 9

Aufgabe 9:

Ein Unternehmen stellt die drei Produkte P_1 , P_2 , P_3 an vier Fertigungsstellen F_1 , F_2 , F_3 , F_4 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in folgender Tabelle zusammengefaßt:

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	1	0	2	50
F_2	0	2	1	50
F_3	2	1	0	80
F_4	1	1	1	60
DB	10	10	10	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf!

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	$r.S.$
z								

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	$r.S.$	θ
x_3	0	$-0,25$	1	$0,5$	0	$-0,25$	0	5	
u_2	0	$2,25$	0	$-0,5$	1	$0,25$	0	45	
x_1	1	$0,5$	0	0	0	$0,5$	0	40	
u_4	0	$0,75$	0	$-0,5$	0	$-0,25$	1	15	
z	0	$-7,5$	0	5	0	$2,5$	0	450	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?

(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	u_4	$r.S.$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	10
u_2	0	0	0	1	1	1	-3	0
x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	30
x_2	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	20
z	0	0	0	0	0	0	10	600

- Wie lauten die optimalen Produktionsmengen?
- Welcher DB wird dabei erzielt?
- An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wieviel freie Kapazität?

Lösung zu Aufgabe 9: