RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

16.12.1995 (WS 95)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Die endgültige Lösung muß auf das jeweilige Aufgabenblatt oder die betreffende Rückseite geschrieben werden.

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Punkte 1

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, daß $|\mathbf{A}^2| = 64$ und $\mathbf{A}$ positiv definit ist!

Lösung:

Punkte 2

Aufgabe 2

Ein Weihnachtsmann steht vor der Aufgabe, einige ausgesuchte Haushalte aus vier Ländern L_1 , L_2 , L_3 , L_4 mit Gabentellern zu versorgen. Der Gabenteller setzt sich aus Früchten F, Nüssen N und Süßigkeiten S zusammen. Die von Land zu Land unterschiedliche Zusammensetzung liegt in Tabellenform vor (in kg / Teller):

	L_1	L_2	L_3	L_4
F	0,2	0,4	–	0,6
N	0,1	–	0,1	0,1
S	0,2	0,1	0,3	–

In L_1 werden 100 Haushalte beliefert, in den Ländern L_2 , L_3 , L_4 jeweils 50 Haushalte.

Die Einkaufspreise für Früchte, Nüsse bzw. Süßigkeiten betragen 5 DM, 10 DM bzw. 20 DM pro kg.

(a) Stellen Sie die obigen Angaben durch geeignet definierte Matrizen bzw. Vektoren dar!

Verwenden Sie diese Matrizen bzw. Vektoren um folgende Fragen zu beantworten:

(b) Wieviel kg Früchte, Nüsse bzw. Süßigkeiten werden zur Versorgung aller Haushalte insgesamt benötigt?

(c) Welche Kosten pro Gabenteller entstehen in jedem der vier Länder?

(d) Wie hoch sind die Gesamtkosten zur Versorgung aller Haushalte?

Lösung:

Punkte 3

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Inverse der partitionierten Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I}+\mathbf{B} \end{pmatrix}$, wobei $\mathbf{B}$ eine reguläre Teilmatrix ist!

Hinweis: Für eine partitionierte Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ mit regulärer Untermatrix $\mathbf{A}_{11}$ und regulärer Hilfsmatrix $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}$ berechnet sich die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ durch $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1}) & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{A}_{12}\,\mathbf{C}^{-1} \\ -\mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{A}_{21}\,\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix}$.

Lösung:

Punkte 4

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung **A** = **L** · **R** einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie (a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 22 \\ 47 \end{pmatrix}$!

Lösung:

Punkte 5

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an!

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	14
1	3	4	19
1	3	5	22

Lösung zu (a)

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	14
1	3	4	19
1	3	4	20

Lösung zu (b)

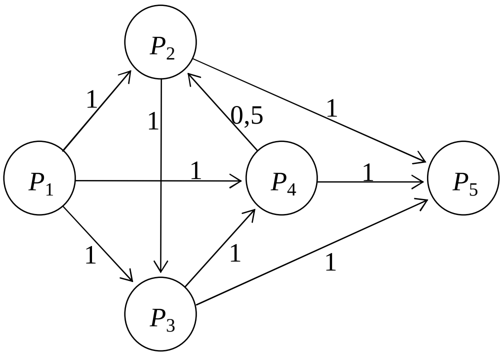
(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	14
1	3	4	19
2	5	7	33

Lösung zu (c)

Punkte 6

Aufgabe 6



Ein Produkt P_5 wird über Zwischenprodukte P_1 ,..., P_4 hergestellt. Der Produktionsprozeß ist durch einen Gozintographen abgebildet. Wieviel Mengeneinheiten (ME) P_1 ,..., P_4 werden zur Herstellung *einer* ME P_5 benötigt?

Hinweis: Die Zahl 1 an dem Pfeil von P_1 nach P_2 bedeutet beispielsweise, daß zur Produktion einer ME P_2 *eine* ME P_1 benötigt werden.

Lösung:

Punkte 7

Aufgabe 7

Die Singulärwertzerlegung einer 2×2-Matrix **A** ergibt

$\mathbf{A} = w_1\,\mathbf{u}_1\,\mathbf{v}_1' + w_2\,\mathbf{u}_2\,\mathbf{v}_2'$ mit $w_1 = 5$, $w_2 = 0$, $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie **A** ! Welchen Rang besitzt die Matrix **A**? (Begründung!)

(b) Welche der Lösungsmengen
- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit obiger Matrix **A** und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix}$? (Begründung !)

(c) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems?

(d) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$! ($\mathbf{A}^+ = w_1^+\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{u}_1' + \ldots + w_n^+\,\mathbf{v}_n\,\mathbf{u}_n'$ mit $w_i^+ = \frac{1}{w_i}$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$, falls $w_i = 0$)

Lösung:

Punkte 8

Aufgabe 8

Die Spur einer symmetrischen 2×2-Matrix **A** beträgt 1, die Spur von $\mathbf{A}^2$ ist 13.

(a) Welche Bedingungen ergeben sich daraus für die beiden Eigenwerte λ_1 , λ_2 von **A**?

(b) Berechnen Sie λ_1 und λ_2 !

(c) Welche Aussage läßt sich über die Definitheit von **A** machen ? (Begründung !)

(d) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix **A** !

Lösung:

Punkte 9

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die beiden Produkte P_1, P_2 an vier Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3, F_4 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (*DB*) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefaßt:

	P_1	P_2	Kapazität
F_1	1	0,5	25
F_2	4	3	120
F_3	3	2	80
F_4	4	4	150
DB	10	6	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des *DB* auf!

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_1	1	0,5	1	0	0	0	25	
u_2	0	1	–4	1	0	0	50	
u_3	0	0,5	3	0	1	0	5	
u_4	0	2	–4	0	0	1	50	
z	0	–1	10	0	0	0	250	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?
(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_1	1	0	4	0	–1	0	20
u_2	0	0	2	1	–2	0	10
x_2	0	1	–6	0	2	0	10
u_4	0	0	8	0	–4	1	30
z	0	0	4	0	2	0	260

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen?

– Welcher *DB* wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wieviel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der *DB*, wenn die Kapazität der Fertigungsstelle 1 um eine Einheit erhöht wird?