RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

7.12.1996 (WS 96/97)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Die endgültige Lösung muß auf das jeweilige Aufgabenblatt oder die betreffende Rückseite geschrieben werden.

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Punkte 1

Aufgabe 1

Bestimmen Sie eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, daß für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 3 \\ a & 2 & 2 & 3 \\ a & 3 & 3 & 4 \\ a & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ gilt: Spur ($\mathbf{A}$) = | $\mathbf{A}$ |.

Lösung:

Punkte 2

Aufgabe 2

Ein Unternehmen verkauft die Maschinen M_1, M_2, M_3 in die Länder L_1, L_2, L_3, L_4. Die Absätze pro Land und Maschine (in Stück) sowie die Verkaufspreise der Maschinen (in TDM / Stück) liegen in Tabellenform vor:

	M_1	M_2	M_3
L_1	7	2	3
L_2	10	5	0
L_3	7	5	1
L_4	11	3	1
Verkaufspreise	5	10	15

(a) Stellen Sie alle Angaben durch geeignet definierte Matrizen bzw. Vektoren dar.
Verwenden Sie *ausschließlich* die Matrix- bzw. Vektorschreibweise zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Welche Umsatzerlöse werden in jedem der vier Länder erzielt?

(c) Wie hoch ist der Absatz für jede der drei Maschinen?

(d) Welchen Gesamtumsatz erwirtschaftet das Unternehmen?

Lösung:

Punkte 3

Aufgabe 3

Berechnen Sie für $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ die Matrix $\mathbf{M}^{10}$!

Tip: Partitionieren Sie $\mathbf{M}$!

Lösung:

Punkte 4

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung **A** = **L** · **R** einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie (a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$!

Lösung:

Punkte 5

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an!

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	0	-1	2
2	1	-3	5
1	1	-2	3

Lösung zu (a)

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	0	-1	2
2	1	-3	5
3	1	-4	8

Lösung zu (b)

(c)

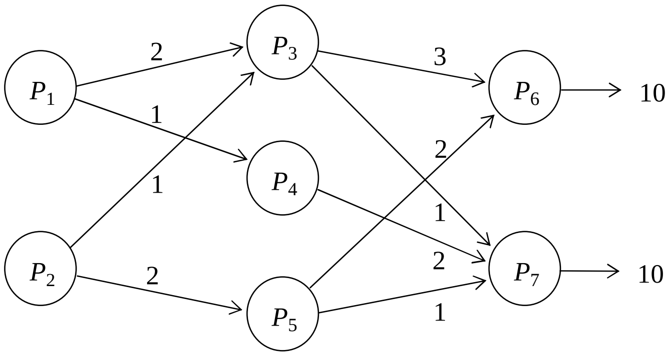
x_1	x_2	x_3	r.S.
1	0	-1	2
2	1	-3	5
3	0	-2	6

Lösung zu (c)

Punkte 6

Aufgabe 6

Die Produkte P_6, P_7 werden aus Rohstoffen P_1, P_2 über Zwischenprodukte P_3, P_4, P_5 gefertigt.
Der Produktionsprozeß ist durch einen Gozintographen dargestellt:



Wieviel Mengeneinheiten (ME) $P_1, \ldots, P_5$ werden zur Herstellung von 10 ME P_6 und 10 ME P_7 insgesamt benötigt?

Hinweis: Die Zahl 2 an dem Pfeil von P_2 nach P_5 bedeutet beispielsweise, daß zur Produktion *einer* ME P_5 *zwei* ME P_2 benötigt werden.

Lösung:

Punkte 7

Aufgabe 7

Eine symmetrische 3×3-Matrix **A** mit den Hauptdiagonalelementen $a_{11} = 4 = a_{22}$, $a_{33} = 1$ besitze den Rang 1, $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = 1$.

(a) Welche Aussage läßt sich aufgrund der Rangangabe über die drei Eigenwerte von **A** treffen?

(b) Bezeichne λ_1 den betragsmäßig größten Eigenwert.
Stellen Sie **A** in Abhängigkeit von λ_1 und dem zugehörigen Eigenvektor $\mathbf{x}_1$ dar!

(c) Bestimmen Sie λ_1 !

(d) Berechnen Sie $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \geq 0$!

Lösung:

Punkte 8

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{UWV}'$ einer 2×2-Matrix $\mathbf{A}$ ergibt $\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix $\mathbf{A}$? (Begründung!)

(b) Welche Eigenschaft folgt hieraus für die Matrix $\mathbf{A}^+$?[1]

(c) Welche der Lösungsmengen
- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- keine Lösung

erhält man daher für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$? (Begründung!)

(d) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems?

(e) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$!

Lösung:

---

[1] $\mathbf{A}^+ = \mathbf{VW}^+\mathbf{U}' = w_1^+ \, \mathbf{v}_1 \, \mathbf{u}_1' + \ldots + w_n^+ \, \mathbf{v}_n \, \mathbf{u}_n'$ mit $w_i^+ = \frac{1}{w_i}$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$, falls $w_i = 0$.

Punkte 9

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1, P_2, P_3 an den Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (*DB*) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefaßt:

	P_1	P_2	P_3	Kapazität
F_1	2	1	1	40
F_2	1	1	2	50
F_3	2	2	2	60
DB	2	1	3	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des *DB* auf!

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.	θ
u_1	1,5	0,5	0	1	–0,5	0	15	
x_3	0,5	0,5	1	0	0,5	0	25	
u_3	1	1	0	0	–1	1	10	
z	–0,5	0,5	0	0	1,5	0	75	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?
(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
u_1	0	–1	0	1	1	–1,5	0
x_3	0	0	1	0	1	–0,5	20
x_1	1	1	0	0	–1	1	10
z	0	1	0	0	1	0,5	80

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1, x_2, x_3 ?

– Welcher *DB* wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wieviel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der *DB*, wenn die Kapazität der Fertigungsstelle 1 um eine Einheit erhöht wird?