RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

6.12.1997 (WS 97/98)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Die endgültige Lösung muß auf das jeweilige Aufgabenblatt oder die betreffende Rückseite geschrieben werden.

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

A 1

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, daß $|\,\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}\,| = \text{Spur}\,(\,\mathbf{B}\,)$ ist.

Lösung:

Aufgabe 2

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1, P_2, P_3 auf den Maschinen M_1, M_2 her. Die Herstellung kann an zwei alternativen Standorten S_1, S_2 mit unterschiedlichen Produktionskosten erfolgen. Die Fertigungszeiten pro Maschine (in Stunden/Stück), das Produktionssoll sowie die Kosten pro Maschinenstunde an den beiden Standorten liegen in Tabellenform vor:

Produktionszeiten	M_1	M_2	Produktionssoll
P_1	1	1	40
P_2	0	2	30
P_3	2	0	30

Maschinenkosten	S_1	S_2
M_1	50	75
M_2	100	75

(a) Stellen Sie die Angaben durch zwei Matrizen und einen Vektor dar.
Verwenden Sie in den Teilaufgaben (b), (c), (d) *ausschließlich* diese Matrizen bzw. diesen Vektor.

(b) Ermitteln Sie die Matrix **K** der Fertigungskosten (k_{ij} = Fertigungskosten von Produkt P_i am Standort S_j).

(c) Wie lange wird jede der Maschinen M_1, M_2 zur Herstellung des Produktionssolls insgesamt eingesetzt?

(d) Welche Gesamtkosten entstünden dabei an jedem der beiden Standorte?

Lösung:

A 3

Aufgabe 3

$\mathbf{A}$ sei eine orthonormale[1] Matrix. Bestimmen Sie für die partitionierte Matrix $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}' & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ den Ausdruck $(\mathbf{M}'\,\mathbf{M})^3$.

Lösung:

[1] Für eine orthonormale Matrix **A** gilt: $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{A}'$.

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$ einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie (a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$!

Lösung:

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an!

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	4
4	5	6	10
1	1	1	2

Lösung zu (a)

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	4
4	5	6	10
2	3	2	4

Lösung zu (b)

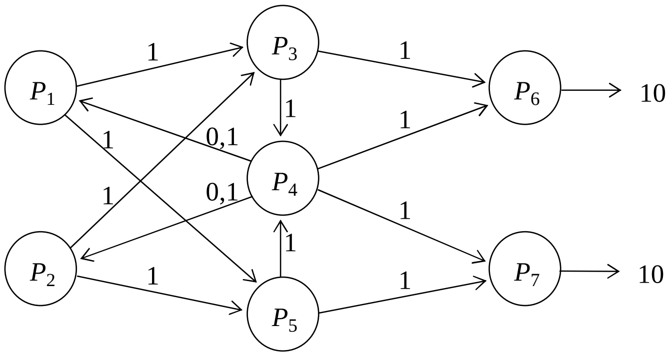
(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	4
4	5	6	10
5	7	9	11

Lösung zu (c)

Aufgabe 6

Die Produkte P_6, P_7 werden aus Rohstoffen P_1, P_2 über Zwischenprodukte P_3, P_4, P_5 gefertigt. Der Produktionsprozeß ist durch einen Gozintographen dargestellt. Wieviel Mengeneinheiten (ME) von $P_1, \ldots, P_5$ werden zur Herstellung von 10 ME P_6 und 10 ME P_7 insgesamt benötigt?



Hinweis: Die Zahl 1 an dem Pfeil von P_5 nach P_7 bedeutet beispielsweise, daß zur Produktion einer ME von P_7 *eine* ME von P_5 benötigt wird.

Lösung:

Aufgabe 7

Die Spur einer symmetrischen 2×2-Matrix **A** beträgt 2, die Determinante ist -3.

(a) Welche Bedingungen ergeben sich daraus für die beiden Eigenwerte λ_1 , λ_2 von **A**?

(b) Berechnen Sie λ_1 und λ_2 !

(c) Welche Aussage läßt sich über die Definitheit von **A** machen ? (Begründung !)

(d) Berechnen Sie $|\, 3\cdot\mathbf{A}^{-1}\,|$!

Lösung:

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2'$ einer 3×2-Matrix $\mathbf{A}$ ergibt

$$w_1 = 25,\quad w_2 = 10,\quad \mathbf{u}_1 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_1 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_2 = \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}.$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix $\mathbf{A}$? (Begründung!)

(b) Welche Eigenschaft besitzt in diesem Fall die Matrix
$\mathbf{A}^+ = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2'$ mit $w_i^+ = \frac{1}{w_i}$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$, falls $w_i = 0$?

(c) Welche der Lösungsmengen
- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- keine Lösung

erhält man daher für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = 25\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$? (Begründung!)

(d) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\cdot\mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems?

(e) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$!

Lösung:

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1, P_2 an den Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3, F_4 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (*DB*) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefaßt:

	P_1	P_2	Kapazität
F_1	1	0,5	100
F_2	4	3	600
F_3	3	2	360
F_4	6	5	300
DB	48	30	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des *DB* auf!

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_1	1	0,5	1	0	0	0	100	
u_2	0	1	–4	1	0	0	200	
u_3	0	0,5	–3	0	1	0	60	
u_4	0	2	–6	0	0	1	300	
z	0	–6	48	0	0	0	4800	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?
(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_1	1	0	4	0	–1	0	40
u_2	0	0	2	1	–2	0	80
x_2	0	1	–6	0	2	0	120
u_4	0	0	6	0	–4	1	60
z	0	0	12	0	12	0	5520

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1, x_2 ?

– Welcher *DB* wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wieviel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der *DB*, wenn die Kapazität der Fertigungsstelle 3 um eine Einheit erhöht wird?