RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM
Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen
Lineare Algebra
5.12.1998 (WS 1998)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, daß $\mathrm{Spur}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}' \cdot \mathbf{A}') = \mathrm{Spur}(\mathbf{A}^2)$ ist.

Lösung:

Aufgabe 2

A 2

Ein Weihnachtsmann steht vor der Aufgabe, einige ausgesuchte Haushalte aus vier Ländern L_1 , L_2 , L_3 , L_4 mit Gabentellern zu versorgen. Der Gabenteller setzt sich aus Früchten F, Nüssen N und Süßigkeiten S zusammen. Die von Land zu Land unterschiedliche Zusammensetzung liegt in Tabellenform vor (in kg / Teller):

	L_1	L_2	L_3	L_4
F	0,4	0,3	0,4	0,5
N	0,3	0,2	0,2	0,1
S	–	0,1	0,2	0,1

In jedem der Länder werden 50 Haushalte beliefert.

Die Einkaufspreise für Früchte, Nüsse bzw. Süßigkeiten betragen 5 DM, 10 DM bzw. 15 DM pro kg.

(a) Stellen Sie die obigen Angaben durch geeignet definierte Matrizen bzw. Vektoren dar!

Verwenden Sie diese Matrizen bzw. Vektoren um folgende Fragen zu beantworten:

(b) Wieviel kg Früchte, Nüsse bzw. Süßigkeiten werden zur Versorgung aller Haushalte insgesamt benötigt?

(c) Welche Kosten pro Gabenteller entstehen in jedem der vier Länder?

(d) Wie hoch sind die Gesamtkosten zur Versorgung aller Haushalte?

Lösung:

Aufgabe 3

$\mathbf{A}$ sei eine orthonormale[1] Matrix. Bestimmen Sie für die partitionierte Matrix $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{A} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ den Ausdruck $(\mathbf{M}'\mathbf{M})^3$.

Lösung:

[1] Für eine orthonormale Matrix $\mathbf{A}$ gilt: $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{A}'$.

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung **A** = **L** · **R** einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie (a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$!

Lösung:

Aufgabe 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an!

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	3	5	14
1	2	3	10
3	4	5	22

Lösung zu (a)

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	3	5	14
1	2	3	10
3	4	15	32

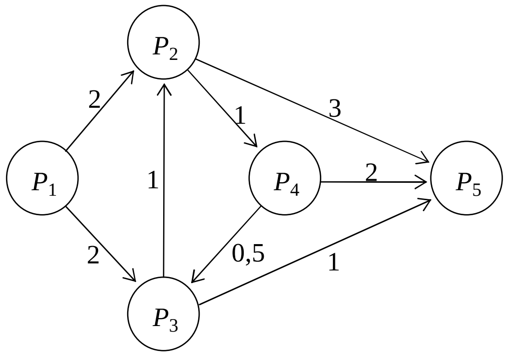
Lösung zu (b)

(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	3	5	14
1	2	3	10
3	4	5	32

Lösung zu (c)

Aufgabe 6



Das Produkt P_5 wird über Zwischenprodukte P_1 , P_2 , P_3 , P_4 gefertigt. Der Produktionsprozeß ist durch einen Gozintographen dargestellt. Wieviel Mengeneinheiten (ME) P_1 , P_2 , P_3 , P_4 werden zur Herstellung *einer* ME P_5 benötigt?

Hinweis: Die Zahl 2 an dem Pfeil von P_4 nach P_5 bedeutet beispielsweise, daß zur Produktion *einer* ME P_5 *zwei* ME P_4 benötigt werden.

Lösung:

Aufgabe 7

A sei eine symmetrische, idempotente 2×2 Matrix mit den Hauptdiagonalelementen $a_{11} = \frac{9}{25}$, $a_{22} = \frac{16}{25}$.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von **A** .

(b) Ermitteln Sie den zum größten Eigenwert gehörenden Eigenvektor, dessen Koeffizienten alle ≥ 0 sind.

Lösung:

Aufgabe 8

Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix **A**? (Begründung!)
Welche Aussage kann daher über die Singulärwerte w_1, w_2, w_3 von **A** gemacht werden?
Wie reduziert sich dadurch die Darstellung $\mathbf{A} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2' + w_3\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3'$ der Singulärwertzerlegung?

(b) Stellen Sie die Matrix **A** als äußeres Produkt zweier Vektoren $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ dar: $\mathbf{A} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}'$.
Normieren Sie **c** und **d** auf die Länge 1 und bestimmen so $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$ und schließlich w_1.

(c) Welche der Lösungsmengen
- genau eine Lösung
- unendlich viele Lösungen
- keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$? (Begründung!)

(d) Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems?
Dabei ist $\mathbf{A}^+ = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2' + w_3^+\mathbf{v}_3\mathbf{u}_3'$ mit $w_i^+ = 1/w_i$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$ sonst.

(e) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$!

Lösung:

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1, P_2 an den Fertigungsstellen F_1, F_2, F_3, F_4 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (*DB*) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefaßt:

	P_1	P_2	Kapazität
F_1	1	0,5	32
F_2	8	5	320
F_3	3	2	120
F_4	12	8	540
DB	40	24	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des *DB* auf!

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_1	1	0,5	1	0	0	0	32	
u_2	0	1	–8	1	0	0	64	
u_3	0	0,5	–3	0	1	0	24	
u_4	0	2	–12	0	0	1	156	
z	0	–4	40	0	0	0	1280	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?
(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_1	1	0	4	0	–1	0	8
u_2	0	0	–2	1	–2	0	16
x_2	0	1	–6	0	2	0	48
u_4	0	0	0	0	–4	1	60
z	0	0	16	0	8	0	1472

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1, x_2 ?

– Welcher *DB* wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wieviel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der *DB*, wenn die Kapazität der Fertigungsstelle 3 um eine Einheit erhöht wird?