RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

Fakultät für Wirtschaftswissenschaft

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen

Lineare Algebra

4.12.1999 (WS 1999)

Name	
Vorname	
Teilnehmer-Nr.	

Zur Beachtung

Die Klausur umfaßt 9 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Bestimmen Sie eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ so, dass für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ gilt: Spur($\mathbf{A}\,\mathbf{D}\,\mathbf{A}'$) = Spur($\mathbf{A}'\,\mathbf{A}$).

Lösung:

Aufgabe 2

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_i auf den Maschinen M_j her. Die dazu benötigten Zeiten, das Produktionssoll sowie die Kosten pro Maschinenstunde liegen in Tabellenform vor:

	M_1	M_2	M_3	Produktionssoll
P_1	5	0	10	12
P_2	0	10	5	24
P_3	12	0	0	15
Maschinenkosten	100	85	70	

(Benötigte Zeiten in Minuten / Stück)

(a) Stellen Sie die obigen Angaben durch eine Matrix und zwei Vektoren dar.
Verwenden Sie *ausschließlich* diese Größen zur Beantwortung folgender Fragen:

(b) Welche Maschinenkosten verursacht die Fertigung je eines Stückes der Produkte P_i ?

(c) Wie lange wird jede der Maschinen M_j zur Herstellung des Produktionssolls insgesamt eingesetzt ?

(d) Welche Maschinenkosten entstehen dabei insgesamt ?

Lösung:

Aufgabe 3

Berechnen Sie für $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ die Matrix $\mathbf{M}^{10}$. ***Tipp***: Partitionieren Sie $\mathbf{M}$.

Lösung:

Aufgabe 4

Die **L**-**R**-Zerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}$ einer quadratischen Matrix **A** ergibt $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie (a) die Determinante von **A**,

(b) die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Lösung:

Aufgabe 5

A 5

Während der Durchführung des Gauß-Algorithmus bei verschiedenen linearen Gleichungssystemen ergeben sich die folgenden Darstellungen. Geben Sie jeweils die Lösungsmenge - ggf. in Parameterform - des Gleichungssystems an.

(a)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	16
0	1	2	7
-1	-1	4	1

Lösung zu (a)

(b)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	16
0	1	2	7
1	1	1	10

Lösung zu (b)

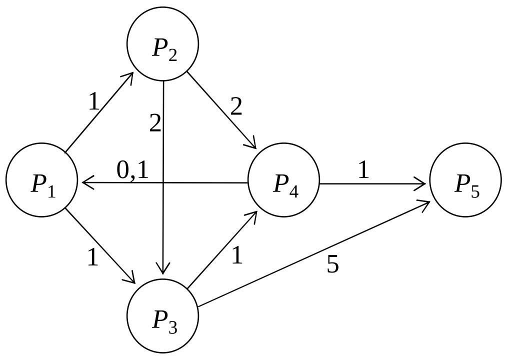
(c)

x_1	x_2	x_3	r.S.
1	2	3	16
0	1	2	7
1	4	7	30

Lösung zu (c)

Aufgabe 6

Ein Produkt P_5 wird über Zwischenprodukte $P_1, \dots, P_4$ hergestellt. Der Produktionsprozess ist durch einen Gozintografen dargestellt. Wie viele Mengeneinheiten (ME) $P_1, \dots, P_4$ werden zur Herstellung *einer* ME P_5 benötigt?



Hinweis: Die Zahl 5 an dem Pfeil von P_3 nach P_5 bedeutet beispielsweise, dass zur Produktion *einer* ME P_5 *fünf* ME P_3 benötigt werden.

Lösung:

Aufgabe 7

Die Spur einer symmetrischen 2×2-Matrix $\mathbf{A}$ beträgt 3, die Spur von $\mathbf{A}^2$ ist 5.

(a) Welche beiden Bedingungen ergeben sich daraus für die Eigenwerte λ_1 , λ_2 von $\mathbf{A}$?

(b) Berechnen Sie λ_1 und λ_2 .

(c) Welche Aussage lässt sich über die Definitheit von $\mathbf{A}$ machen ? (Begründung !)

(d) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $\mathbf{A}$.

Lösung:

Aufgabe 8

Die Singulärwertzerlegung $\mathbf{A} = w_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1' + w_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2' + w_3\mathbf{u}_3\mathbf{v}_3'$ einer 3×3-Matrix $\mathbf{A}$ ergibt $w_1 = 1$, $w_2 = \frac{1}{2}$, $w_3 = \frac{1}{3}$,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{3\cdot\sqrt{2}}\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{3\cdot\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}.$$

(a) Welchen Rang besitzt die Matrix $\mathbf{A}$? (Begründung!)

(b) Welche Eigenschaft besitzt in diesem Fall die Matrix $\mathbf{A}^+ = w_1^+\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1' + w_2^+\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2' + w_3^+\mathbf{v}_3\mathbf{u}_3'$
mit $w_i^+ = \frac{1}{w_i}$, falls $w_i \neq 0$, $w_i^+ = 0$, falls $w_i = 0$.

(c) Welche der Lösungsmengen - genau eine Lösung - unendlich viele Lösungen - keine Lösung

erhält man für das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}$? (Begründung!)

Welche Eigenschaft besitzt die "Lösung" $\mathbf{x}^+ = \mathbf{A}^+\cdot\mathbf{b}$ dieses Gleichungssystems?

(d) Berechnen Sie $\mathbf{x}^+$.

Lösung:

Aufgabe 9

Ein Unternehmen stellt die Produkte P_1 , P_2 an den Fertigungsstellen F_1 , F_2 , F_3 , F_4 her. Die je Produkt- und Fertigungsstelle benötigten Produktionszeiten, die Kapazitäten der Fertigungsstellen sowie die Deckungsbeiträge (DB) der Produkte sind in nebenstehender Tabelle zusammengefasst:

	P_1	P_2	Kapazität
F_1	1	0,5	40
F_2	6	4	360
F_3	3	2	150
F_4	2	3	300
DB	100	60	

(a) Stellen Sie das zugehörige Simplex-Anfangstableau zur Maximierung des DB auf!

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z							

(b) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_1	1	0,5	1	0	0	0	40	
u_2	0	1	–6	1	0	0	120	
u_3	0	0,5	–3	0	1	0	30	
u_4	0	2	–2	0	0	1	220	
z	0	–10	100	0	0	0	4000	

Welche Variable ist in die Basis aufzunehmen, welche zu eliminieren?
(Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus und markieren Sie das Pivotelement!)

(c) Das Endtableau besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
x_1	1	0	4	0	–1	0	10
u_2	0	0	0	1	–2	0	60
x_2	0	1	–6	0	2	0	60
u_4	0	0	10	0	–4	1	100
z	0	0	40	0	20	0	4600

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen x_1 , x_2 ?

– Welcher DB wird dabei erzielt?

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität?

– Wie ändert sich der DB, wenn die Kapazität der Fertigungsstelle 1 um eine Einheit erhöht wird?