Fakultät für
Wirtschaftswissenschaft

RUHR
UNIVERSITÄT
BOCHUM

KLAUSUR

Mathematik für Ökonomen
Sommersemester 2014
4.8.2014

Name	
Vorname	
Matrikelnummer	
Teilnehmer-Nr.	
Unterschrift	

Erzielte Bonuspunkte aus der Vorklausur:	____ Punkte

Zur Beachtung

Die Klausur umfasst 8 Aufgaben; pro Aufgabe sind 5 Punkte erreichbar.
Es haben nur solche Lösungen Anspruch auf Wertung, aus denen der Lösungsweg klar ersichtlich ist.

Dauer der Klausur: 90 Minuten

Hilfsmittel: keine

Bitte nicht ausfüllen

Punkte	Note	Unterschrift

Aufgabe 1

Die drei Hilfsabteilungen N_1, N_2, N_3 geben an die beiden Hauptabteilungen H_1, H_2 Leistungen ab, "beliefern" sich aber auch gegenseitig. Die Höhe dieses Leistungstransfers – gemessen in Leistungseinheiten (LE) – sowie die in den Hilfsabteilungen angefallenen primären Kosten liegen in Tabellenform vor:

		Empfänger					
		N_1	N_2	N_3	H_1	H_2	Primärkosten
	N_1	–	3	5	1	1	300
Lieferant	N_2	2	–	5	6	2	270
	N_3	2	3	–	9	11	150

(a) Bestimmen Sie die Verrechnungspreise p_i in €/LE für jede der Abteilungen N_i.

(b) Verteilen Sie die primären Gesamtkosten auf die Hauptabteilungen H_1, H_2.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ die

(a) inverse Matrix von $\mathbf{A}$,

(b) Definitheit von $\mathbf{A}$,

(c) quadratische Form $\mathbf{x}' \mathbf{B} \mathbf{x}$,

(d) Determinante von $\mathbf{B}$.

Aufgabe 3

(a) Während der Durchführung des Simplex-Algorithmus für ein Optimierungsproblem ergibt sich folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.	θ
x_1	1	0,5	1	0	0	0	20	
u_2	0	1	–8	1	0	0	40	
u_3	0	0,5	–3	0	1	0	15	
u_4	0	2	–4	0	0	1	80	
z	0	–5	70	0	0	0	1400	

Füllen Sie die letzte Spalte des Tableaus aus, markieren Sie das Pivotelement und führen Sie den nächsten Pivotschritt durch. Tragen Sie das Ergebnis in die nachstehende Tabelle ein.

BV	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	r.S.
z							

(b) Das Endtableau <u>eines anderen</u> Optimierungsproblems (Ermittlung eines DB-maximalen Produktionsprogramms unter Kapazitätsbeschränkungen an den Fertigungsstellen F_i) besitzt folgende Gestalt:

BV	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	r.S.
x_2	0	1	3	2	–1	0	10
x_1	1	0	1	–1	1	0	20
u_3	0	0	2	–2	–3	1	5
z	0	0	2	3	5	0	340

– Wie lauten die optimalen Produktionsmengen? $x_1 =$ $x_2 =$ $x_3 =$

– Welcher DB wird dabei erzielt? DB =

– An welcher Fertigungsstelle gibt es noch wie viel freie Kapazität? F_1 : F_2 : F_3 :

– Wie ändert sich der optimale DB, wenn genau eine ME von Produkt P_3 hergestellt wird? DB :

Hinweis: Statt "0" oder "keine" wird "—" <u>nicht</u> als Antwort auf eine der Fragen akzeptiert.

Aufgabe 4

Eine Aktie wird für 10.000 € erworben.

(a) Wie hoch ist der Wert der Aktie nach 10 Jahren, wenn in dieser Zeit mit einer *stetigen* Wertsteigerung von 5% gerechnet werden kann ?

(b) Am Ende jeden Jahres erhält man 300 € Dividende ausgezahlt. Die Dividende wird auf einem Extrakonto mit 3%-iger Verzinsung und jährlicher Zinsgutschrift angelegt. Welcher Betrag steht auf diesem Konto am Ende des 10. Jahres zur Verfügung ?

(c) Welche Rendite (effektive Verzinsung) erzielt man insgesamt mit dem Erwerb der Aktie ?

$1{,}05^{10} = 1{,}628895$	$\frac{1{,}05^{10}-1}{0{,}05} = 12{,}577893$	$e^{1{,}05} = 2{,}857651$	$e^{0{,}5} = 1{,}648721$	$e^{0{,}05} = 1{,}051271$	$\ln(5) = 1{,}609438$
$1{,}03^{10} = 1{,}343916$	$105\cdot(1{,}03^{10}-1) = 36{,}1112$	$3\cdot 1{,}03^{10} = 4{,}03175$	$3\cdot e^{0{,}3} = 4{,}04958$	$3\cdot e^{3} = 20{,}0855$	$\ln(30) = 3{,}4012$
$\sqrt[10]{2{,}051896} = 1{,}0745$	$\sqrt[10]{2{,}033853} = 1{,}0736$	$\sqrt[10]{2{,}009833} = 1{,}0723$	$\sqrt[10]{1{,}992637} = 1{,}0714$	$\sqrt[10]{1{,}988841} = 1{,}0712$	$\sqrt[10]{1{,}972811} = 1{,}0703$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie – falls existent – die globalen Extrema der Funktion $f(x) = \begin{cases} f_1(x) = \dfrac{2-x}{1-x} & x \le 0 \\ f_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 2 \quad \text{für} & 0 < x < 3 \\ f_3(x) = 6 - e^{3-x} & x \ge 3 \end{cases}$.

Aufgabe 6

(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $f'(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ für die Funktion $f(x) = x + \dfrac{\sin(x)}{x}$ und $x_0 = 0$.

(b) Wie lautet das Taylor-Polynom ersten Grades (Tangente) von $f(x)$, entwickelt an der Stelle $x_0 = 0$?

Aufgabe 7

(a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Funktion $f(x,\ y) = xy^4 + x^3y - \frac{5}{2}y^2 - 2x^2 + 1$.

(b) $(0;\ 0)$ und $(1;\ 1)$ sind kritische Punkte dieser Funktion.
Ermitteln Sie die Hesse-Matrizen an den kritischen Punkten und Überprüfen Sie diese auf Definitheit.
Handelt es sich bei diesen Punkten um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte?

Aufgabe 8

Berechnen Sie das Integral $\int_1^8 \int_1^{27} \frac{2}{9} \cdot \sqrt[3]{\frac{y}{x^2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.